

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.

Μονάδες 5

A3. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι "1-1". Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης, f^{-1} , της f είναι το σύνολο τιμών της f .

β) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

γ) Αν $v \in \mathbb{N}^*$, ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2v}} = -\infty$.

δ) Αν μια συνάρτηση είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

ε) Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + 9x - 3$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Δίνεται ακόμα ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 1$.

B1. Να βρείτε την τιμή του α .

Μονάδες 5

Στα ερωτήματα B2 έως B4 να θεωρήσετε ότι $\alpha = -6$.

B2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις θετικές πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 10

B3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 6

B4. Έστω $g(x) = x + f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Αν $\xi \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(\xi, g(\xi))$, αντίστοιχα, τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^x \eta \mu x & , \quad x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x} & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ (μονάδες 2) αλλά όχι παραγωγίσιμη στο x_0 (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει την ευθεία $(\varepsilon): y = x + \frac{1}{2}$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\xi \in (-\pi, 0)$.

Μονάδες 5

- Γ4.** Ένα κινητό M ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, $x \geq 0$, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του M , $x'(t)$, να είναι θετικός για κάθε $t \geq 0$. Να εξετάσετε εάν υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$ τέτοια ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του M να είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x του M .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και μια παράγουσα, F , της f στο $(0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύει ότι:

$$xf(x) = 2F(x)\ln x, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Δίνεται ακόμα ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y = 2x$.

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{F(x)}{x^{\ln x}}$, $x > 0$, είναι σταθερή.

Μονάδες 6

- Δ2.** i) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}$. (μονάδες 4)

- ii) Να αποδείξετε ότι $F(1) = 1$ (μονάδες 3) και $F(x) = x^{\ln x}$, για κάθε $x > 0$ (μονάδες 2).

Μονάδες 9

- Δ3.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση F (μονάδες 2) και να λύσετε την εξίσωση $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$ στο διάστημα $(0, +\infty)$ (μονάδες 3).

Μονάδες 5

- Δ4.** Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης F , τις ευθείες $x=1$, $x=e$ και τον άξονα $x'x$ ισχύει $E > 2e - 3$.

Μονάδες 5