

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ, ΣΕΛ. 186 – Απόδειξη

A2. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ, ΣΕΛ. 76 – Θεώρημα

A3. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ, ΣΕΛ. 161 – Ορισμός

A4. α. Σ

β. Σ

γ. Λ

δ. Λ

ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

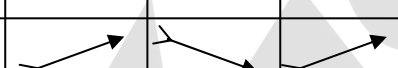
B1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πολωνυμική. Αφού παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=1$ τότε πρέπει $f'(x_0)=0 \Rightarrow f'(1)=0$.

$$f'(x) = (x^3 + \alpha x^2 + 9x - 3)' = 3x^2 + 2\alpha x + 9$$

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 1^2 + 2\alpha \cdot 1 + 9 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = -12 \Leftrightarrow \alpha = -6$$

B2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
f'	+	0	-	0	+
f					

$$\text{Έστω } A_1 = (-\infty, 1],$$

$$A_2 = [1, 3]$$

$$A_3 = [3, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 3 = 1$$

$$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 3 = -3$$

Επομένως $f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 1]$ επειδή f γνησίως αύξουσα και αφού

$0 \in f(A_1)$ τότε $x_1 \in A_1$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$ (μοναδικό)

$f(A_2) = [f(3), f(1)] = [-3, 1]$ επειδή f γνησίως φθίνουσα και $0 \in f(A_2)$ τότε υπάρχει $x_2 \in A_2$ και επιπλέον $x_2 > 0$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$ (μοναδικό)

$f(A_3) = \left[f(3), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-3, +\infty)$ επειδή f γνησίως αύξουσα και αφού $0 \in f(A_3)$ τότε

υπάρχει $x_3 \in A_3$ και επιπλέον $x_3 > 0$ τέτοιο ώστε $f(x_3) = 0$ (μοναδικό)

$f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 - 3 = -3$ άρα το $f((-\infty, 0])$ δεν περιλαμβάνει το 0, επομένως και $x_1 > 0$

B3. $f''(x) = (3x^2 - 12x + 9)' = 6x - 12$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow 6x = 12 \Leftrightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	-	0	+
f			

Σ.Κ.

Άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$ και κυρτή στο $[2, +\infty)$. Επίσης παρουσιάζει Σημείο Καμπής στο $\Gamma(2, f(2))$ με $f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 3 = -1$

Οπότε στο $\Gamma(2, -1)$

B4. Η g συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών και παραγωγίσιμων.

$$g'(x) = (x + f(x))' = 1 + f'(x)$$

εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$:

$$y - f(\xi) = f'(\xi) \cdot (x - \xi) \Leftrightarrow y = x \cdot f'(\xi) - \xi \cdot f'(\xi) + f(\xi) \quad (1)$$

εφαπτομένη της C_g στο $B(\xi, g(\xi))$:

$$y - g(\xi) = g'(\xi) \cdot (x - \xi) \Leftrightarrow y = (1 + f'(\xi)) \cdot (x - \xi) + (\xi) + f(\xi) \Leftrightarrow$$

$$y = x + x \cdot f'(\xi) - \cancel{\xi} - \xi \cdot f'(\xi) + \cancel{\xi} + f(\xi) = x + x \cdot f'(\xi) - \xi \cdot f'(\xi) + f(\xi) \quad (2)$$

Για να τέμνονται οι δύο ευθείες, αρκεί:

$$\cancel{x \cdot f'(\xi)} - \cancel{\xi \cdot f'(\xi)} + \cancel{f(\xi)} = x + \cancel{x \cdot f'(\xi)} - \cancel{\xi \cdot f'(\xi)} + \cancel{f(\xi)} \Leftrightarrow x = 0$$

Άρα οι δύο (2) εφαπτομένες τέμνονται πάνω στον $y'y$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \cdot \eta\mu x = 1 \cdot 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = \sqrt{0^2 + 0} = 0 = f(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Άρα η f συνεχής στο $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \cdot \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x \cdot \sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} = (0 + 1) \cdot (+\infty) = +\infty \text{ γιατί } \sqrt{x^2 + x} > 0 \text{ για κάθε } x > 0. \end{aligned}$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Γ2. Η f δεν έχει ανοιχτό άκρο στο D_f , επομένως δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Πλάγια Ασύμπτωτη στο $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x \cdot \eta\mu x}{x} = L$$

$$\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$

$$L = 0 \cdot 0 = 0 = \lambda_1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \lambda_1 x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \cdot \eta\mu x - 0 \cdot x) = 0 \cdot \alpha = 0 = \beta_1 \text{ όπου } \alpha \in [-1, 1].$$

Επομένως η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ τον $x'x$.

Πλάγια Ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} \stackrel{|x|=x}{\underset{x \rightarrow +\infty}{=}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{\cancel{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt{1 + 0} = 1 = \lambda_2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda_2 x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{(\sqrt{x^2 + x} + x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{2} = \beta_2$$

Άρα η f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = x + \frac{1}{2}$

Γ3. Θα πρέπει η εξίσωση $f(x) - x - \frac{1}{2} = 0$ να έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-\pi, 0)$.

Έστω $g: [-\pi, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - x - \frac{1}{2}$

Η g συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως διαφορά συνεχών

$$\left. \begin{aligned} g(-\pi) &= e^{-\pi} \cdot \eta\mu(\pi) + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0 \\ g(0) &= e^0 \eta\mu 0 - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0 \end{aligned} \right\} g(-\pi) \cdot g(0) < 0$$

Άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-\pi, 0)$ τέτοιο ώστε

$$g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \xi + \frac{1}{2}$$

Γ4. $y_M = f(x_M) = \sqrt{x_M^2 + x_M}$ αφού $x_M \geq 0$.

Άρα $y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$

$$y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} \cdot (x^2(t) + x(t))' = \frac{2x(t) \cdot x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}}$$

$$\text{Θέλουμε } y'(t) = x'(t) \Leftrightarrow \frac{2x(t) \cdot x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} = x'(t) \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x(t) + 1}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} = 1 \Leftrightarrow 2x(t) + 1 = 2\sqrt{x^2(t) + x(t)} \Leftrightarrow$$

$$(2x(t) + 1)^2 = [2\sqrt{x^2(t) + x(t)}]^2 \Leftrightarrow 4x^2(t) + 4x(t) + 1 = 4x^2(t) + 4x(t) \Leftrightarrow 1 = 0$$

ΑΤΟΠΟ άρα δεν υπάρχει t_0 τέτοιο ώστε $y'(t_0) = x'(t_0)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από υποθ. : $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x > 0$ και $f'(1) = 2$. Ακόμη $x^{\ln x} = e^{\ln^2 x}$, $x > 0$

$$g'(x) = \frac{F'(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) \cdot (e^{\ln^2 x})'}{(x^{\ln x})^2} \Leftrightarrow g'(x) = \frac{F'(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) \cdot e^{\ln^2 x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{(x^{\ln x})^2} \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = \frac{x^{\ln x} (x - (x) - 2F(x) \ln x)}{x(x^{\ln x})^2} \xrightarrow{\text{υποθ.}} g'(x) = 0, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Άρα η g είναι σταθερή.

Δ2. i) Για $x = 1$ η υπόθεση γίνεται $1 \cdot f(1) = 2F(1) \cdot \ln 1 \Leftrightarrow f(1) = 0$.

Επίσης f συνεχής ως παραγωγίσιμη

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} \stackrel{\frac{f(1)=0}{\ln 1=0}}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{f(1)}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{ii) Για } 0 < x \neq 1 \text{ είναι : } F(x) = \frac{f(x)}{\ln x} \cdot \frac{x}{2} \text{ με } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x)}{\ln x} \cdot \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{οπότε και } \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = 1 \Leftrightarrow F(1) = 1$$

(Η F είναι συνεχής, ως παραγωγίσιμη)

$$\text{Είναι } g(1) = \frac{F(1)}{1^{\ln 1}} = \frac{1}{1^0} = \frac{1}{1} = 1. \text{ Άρα } g(x) = 1, x > 0.$$

$$\text{Τότε η } g(x) = \frac{F(x)}{x^{\ln x}} \Leftrightarrow 1 = \frac{F(x)}{x^{\ln x}} \Leftrightarrow F(x) = x^{\ln x}, x > 0$$

$$\mathbf{\Delta 3.} F'(x) = (e^{\ln^2 x})' = e^{\ln^2 x} \cdot 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln x$$

x	0	1	$+\infty$
$F'(x)$	-	0	+
$F(x)$	$+\infty$		$+\infty$

$$\text{ΕΛ. } F(1) = 1$$

Άρα F γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και F γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln^2 x} \stackrel{\ln^2 x = u}{\underset{x \rightarrow +\infty, \text{ τότε } u \rightarrow +\infty}{=}} \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln^2 x} = +\infty$$

Η εξίσωση $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$ (1) έχει προφανή ρίζα το $x_0 = 1$, αφού $F(1) = 1$ και τότε

$$F(1) = F(1) - (1-1)^2 \Leftrightarrow F(1) = F(1)$$

- Αν $x > 1 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x^2 > x (> 1)$. Άρα $F(x^2) > F(x)$ (αφού F γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$)
(1) $\Leftrightarrow F(x^2) - F(x) = -(x-1)^2$ αδύνατη στο $[1, +\infty)$ αφού το 1^ο μέλος είναι θετικό και το 2^ο μέλος αρνητικό.

- Έστω $x \in (0, 1)$. Τότε $x < 1 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x^2 < x \Leftrightarrow x^2 - x < 0$ (άρα $\neq 0$)

$$\text{Τότε (1) } \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) = -(x-1)^2 \stackrel{:(x^2-x)}{\Leftrightarrow} \frac{F(x^2) - F(x)}{x^2 - x} = -\frac{x-1}{x} \quad (2)$$

Από Θ.Μ.Τ. για την F στο $[x^2, x]$ υπάρχει $\xi \in (0, 1)$

$$F'(\xi) = \frac{F(x^2) - F(x)}{x^2 - x}$$

Τότε (2) $\Leftrightarrow F'(\xi) = -\frac{x-1}{x}$ άτοπο, αφού

- $F'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ άρα $F'(\xi) < 0$ και
- $0 < x < 1$, άρα $x-1 < 0$, $x > 0$ και τότε $-\frac{x-1}{x} > 0$

Δ4. Ισχύει $\ln x \leq x-1$ (η ισότητα για $x=1$ μόνο) για κάθε $x > 0$

Θέτω $x = e^y > 0$, $\ln e^y \leq e^y - 1 \Leftrightarrow y + 1 \leq e^y$

Δηλαδή $e^x \geq x+1$, $x \in \mathbb{R}$ (η ισότητα μόνο για $x=0$)

$F(x) = x^{\ln x} = e^{\ln^2 x}$ άρα $\int_1^e F(x) dx > \int_1^e \ln^2 x + 1 dx$

$$\int_1^e \ln^2 x dx + \int_1^e 1 dx = [x \ln^2 x]_1^e - \int_1^e x' \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx + [x]_1^e =$$

$$= e \cdot 1 - 1 \cdot 0 - 2 \int_1^e \ln x dx + e - 1 = 2e - 1 - 2 \left([x \ln x]_1^e - \int_1^e x' \cdot \frac{1}{x} dx \right) =$$

$$= 2e - 1 - 2(e - 0 - (e - 1)) = 2e - 1 - 2 \cdot (+1) = 2e - 3$$

Οπότε $\int_1^e F(x) dx > 2e - 3$

Οι παραπάνω απαντήσεις είναι ενδεικτικές