

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΠΑΛ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1.

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \frac{1}{v} \cdot \sum_{i=1}^v t_i = \frac{x_1 - \bar{x} + x_2 - \bar{x} + x_3 - \bar{x} + \dots + x_v - \bar{x}}{v} = \\ &= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_v}{v} - \cancel{v} \cdot \frac{\bar{x}}{\cancel{v}} = \bar{x} - \bar{x} = 0 \end{aligned}$$

A2. Σχολ. Βιβλίο «Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής» – σελ. 16

A3. α) Λάθος β) Σωστό γ) Σωστό δ) Σωστό ε) Λάθος

A4. α. $(c)' = 0$ β. $(x^2)' = 2x$

ΘΕΜΑ Β

B1.

Πλήθος ωρών x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i
0	10	20	10
1	15	30	25
2	11	22	36
3	8	16	44
4	6	12	50
Σύνολο	50	100	

$$N_5 = N_4 + v_5 \Leftrightarrow N_4 = N_5 - v_5 = 50 - 6 = 44$$

$$N_4 = N_3 + v_4 \Leftrightarrow N_3 = N_4 - v_4 = 44 - 8 = 36$$

$$N_3 = N_2 + v_3 \Leftrightarrow N_2 = N_3 - v_3 = 36 - 11 = 25$$

$$N_2 = N_1 + v_2 \Leftrightarrow N_1 = N_2 - v_2 = 25 - 15 = 10$$

$$v_1 = N_1 = 10$$

Με την βοήθεια της σχέσης $f_i\% = \frac{v_i}{v} \cdot 100\%$, συμπληρώνουμε την στήλη $f_i\%$

Γ2. Η f παρουσιάζει Τοπικό Ελάχιστο στο $x = 0$, το $f(0) = -2 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 + a = a$

Η f παρουσιάζει Τοπικό Μέγιστο στο $x = 2$, το

$$f(2) = -2 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + a = -16 + 24 + a = 8 + a$$

$$\text{Άρα } \frac{f(0) + f(2)}{2} = -8 \Leftrightarrow \frac{a + 8 + a}{2} = -8 \Leftrightarrow 2a + 8 = -16 \Leftrightarrow 2a = -24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = -12$$

$$\text{Επομένως } f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 12$$

Γ3.

$$x_0 = 1, f(x_0) = f(1) = -2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 12 = -8,$$

$$f'(x_0) = f'(1) = -6 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 = 6$$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - (-8) = 6(x - 1) \Leftrightarrow y + 8 = 6x - 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 6x - 14$$

$$\textbf{Γ4. } f(2) = 8 + a = 8 - 12 = -4$$

Για κάθε $x \in [2, +\infty)$ ισχύει ότι $f(x) \leq f(2)$ αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Οπότε

$$f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 12 \leq -4 \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 8 \leq 0 \stackrel{:(-2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0$$

$$\text{Οπότε } f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + \lambda x^2 + 7x + \frac{2}{3} \right)' = x^2 + 2\lambda x + 7$$

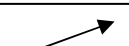
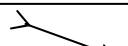
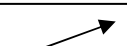
$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1^2 + 2\lambda \cdot 1 + 7 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = -8 \Leftrightarrow \lambda = -4$$

$$\text{Επομένως } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + \frac{2}{3} \text{ και } f'(x) = x^2 - 8x + 7$$

Δ2.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0, \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 64 - 28 = 36$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 6}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{8+6}{2} = 7 \quad \text{ή} \quad x_2 = \frac{8-6}{2} = 1$$

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

T.M. T.E.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και στο $[7, +\infty)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, 7]$

Δ3.

$$2020 < 2025 \xLeftrightarrow{f \nearrow [7, +\infty)} f(2020) < f(2025) \Leftrightarrow f(2025) - f(2020) > 0$$

$$\frac{3}{2} < \frac{5}{2} \xLeftrightarrow{f \searrow [1, 7]} f\left(\frac{3}{2}\right) > f\left(\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right) > 0$$

$$\text{Επομένως } A = \frac{f(2025) - f(2020)}{f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{(+)}{(+)} = (+) \text{ δηλαδή έχει θετικό πρόσημο.}$$

Δ4.

$$f''(x) = (x^2 - 8x + 7)' = 2x - 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f''(x) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 7 - 2x + 8 + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 10x + 16}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \ell$$

$$x^2 - 10x + 6 = 0 \quad \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 100 - 64 = 36$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 6}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{10+6}{2} = 8 \quad \text{ή} \quad x_2 = \frac{10-6}{2} = 2$$

$$\text{άρα } x^2 - 10x + 16 = (x-8)(x-2)$$

$$\begin{aligned} \ell &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-8)(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{3})(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-8)(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{3})^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-8)(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{x+1-3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-8)\cancel{(x-2)}(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{\cancel{x-2}} = \\ &= (2-8)(\sqrt{2+1} + \sqrt{3}) = -12\sqrt{3} \end{aligned}$$