ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΕΠΑΛ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1.

Έστω $k\colon A \to \mathbb{R}$ με $k(x) = f(x) + g(x)$

$$k'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{k(x+h)-k(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

Άρα $(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$

Α2. α) Σχολ. Βιβλίο «Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής» – σελ. 65
β) Σχολ. Βιβλίο «Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής» – σελ. 86-87

Α3. **α) Λάθος** **β) Λάθος** **γ) Σωστό** **δ) Σωστό**

ΘΕΜΑ Β

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + \frac{1}{3}$$

Β1. $f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + \frac{1}{3}\right)' = 3\cdot\frac{1}{3}x^2 - 6x + 5 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - 6x + 5$

Β2.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 5$

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τ.Μ.		Τ.Ε.		

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και στο $[5, +\infty)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, 5]$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x=1$, το $f(1)=\frac{1}{3}1^3-3\cdot 1+5\cdot 1+\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x=5$, το

$f(5)=\frac{1}{3}\cdot 5^3-3\cdot 5^2+5\cdot 5+\frac{1}{3}=-8$

Β3. $x_0=0$, $f(x_0)=f(0)=\frac{1}{3}\cdot 0^3-3\cdot 0^2+5\cdot 0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

$f'(x_0)=f'(0)=0^2-6\cdot 0+5$

$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)\Leftrightarrow y-\frac{1}{3}=5\cdot(x-0)\Leftrightarrow y=5x+\frac{1}{3}$

Β4. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=f'(-1)=(-1)^2-6\cdot(-1)+5=12$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $s=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{2x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+7)\cdot\cancel{(x-1)}}{2\cdot\cancel{(x-1)}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+7}{2}=\frac{1+7}{2}=4$,

Γ2. $CV=0.2\Leftrightarrow\frac{s}{|\bar{x}|}=0.2\Leftrightarrow|\bar{x}|=\frac{0.2}{4}=20\Rightarrow|\bar{x}|=20\Rightarrow\bar{x}=20$, διότι η πλειοψηφία των παρατηρήσεων είναι θετικοί αριθμοί και το $s=4$. (Αν ήταν $\bar{x}=-20$, μία παρατήρηση θα απείχε πάρα πολύ από τις υπόλοιπες, άρα η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων θα ήταν σαφώς πιο αυξημένη.)

Γ3. $\bar{x}=\frac{1}{\nu}\cdot\sum_{i=1}^{5}x_i=\frac{1}{5}\cdot(22+18+20+\kappa+14+16)=\frac{90+\kappa}{5}\Leftrightarrow$

$20\cdot 5=90+\kappa\Leftrightarrow\kappa=10$

$14,\ 16,\ 18,\ 22,\ 30$

δ: μεσαία παρατήρηση, άρα $\delta=18$

Γ4.

Έστω X με x_i οι παρατηρήσεις της εκφώνησης, όπου $i=1,2,3,...,5$

Τότε, έστω Y με $y_i=x_i+0,2\cdot x_i\Rightarrow y_i=1,2\cdot x_i$

Άρα η μεταβλητή Y εξαρτάται γραμμικά από την X, επομένως $\bar{y}=1,2\cdot\bar{x}$ και $s_y=1,2\cdot s_x$

$\bar{y}=1,2\cdot 20=24$, $s_y=1,2\cdot s_x=1,2\cdot 4=4,8$

$$CV_y=\frac{s_y}{|\bar{y}|}=\frac{4,8}{24}\Rightarrow CV=0,2 \text{ ή } 20\%$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $\overset{\Delta}{\mathrm{AOB}}$:

$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2\Leftrightarrow 10^2=\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2\Rightarrow \mathrm{y}=\sqrt{100-\mathrm{x}^2}$

Πρέπει $x>0$ ΚΑΙ $y>0$ ΚΑΙ $100-x^2\geqslant 0\Leftrightarrow x^2\leqslant 100\Leftrightarrow x\leqslant 10$

Άρα $x\in(0,10)$

Οπότε έστω $f:(0,10)\to R^+$ με $f(x)=\sqrt{100-x^2}$

Δ2.

$$f'(x)=\left(\sqrt{100-x^2}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{100-x^2}}\cdot(100-x^2)'=\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{100-x^2}}\Rightarrow f'(x)=-\frac{x}{\sqrt{100-x^2}}$$

Άρα θέλουμε το $f'(8)=-\dfrac{8}{\sqrt{100-8^2}}=-\dfrac{8}{\sqrt{36}}=-\dfrac{8}{6}=-\dfrac{4}{3}$

Δ3.

$$\lim_{x\to 6}\frac{f(x)-8}{x-6}=\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{100-x^2}-8}{x-6}=\lim_{x\to 6}\frac{\left(\sqrt{100-x^2}-8\right)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}{(x-6)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{100-x^2-64}{(x-6)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}=\lim_{x\to 6}\frac{36-x^2}{(x-6)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{-\cancel{(x-6)}(x+6)}{\cancel{(x-6)}\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}=\lim_{x\to 6}\frac{-(x+6)}{\sqrt{100-x^2}+8}=\frac{-(6+6)}{\sqrt{100-6^2}+8}=-\frac{3}{4}$$

Δ4.

$$f'(x)=-\frac{x}{\sqrt{100-x^2}}$$

x	0 10
$-x$	$-$
$\sqrt{100-x^2}$	$+$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$\searrow$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο D_f

Επομένως

$$2,3<2,8<3,5\Rightarrow x_1<x_3<x_2\overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x_1)>f(x_2)>f(x_3)$$