ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ – ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ, ΣΕΛ. 111 – Θεώρημα Παραγώγου Αθροίσματος

Α2. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ, ΣΕΛ. 104 – Ορισμός παραγωγισιμότητας σε κλειστό διάστημα

Α3. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ, ΣΕΛ. 128 – Θεώρημα Rolle

Α4. **α.** Λ

β. Λ

γ. Λ

δ. Σ

ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

$g: R \to R,\ g(x) = \dfrac{4 - e^{2x}}{e^x}$

$h: (0, +\infty) \to R,\ h(x) = \ln x$

Β1. $D_{g\circ h} = \{x \in D_h / h(x) \in D_g\} \Leftrightarrow \{x > 0 / \ln x \in R\}$

Άρα $D_{g\circ h} = (0, +\infty)$, με τύπο $(g\circ h)(x) = g(h(x)) = \dfrac{4 - e^{2\ln x}}{e^{\ln x}} = \dfrac{4 - x^2}{x}$.

Επομένως $f(x) = (g\circ h)(x) = \dfrac{4 - x^2}{x},\ x > 0$.

Β2. **i)** Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

Τότε

$$f'(x) = \left(\frac{4 - x^2}{x}\right)' = \frac{(4 - x^2)'x - (4 - x^2)x'}{x^2} = \frac{-2x\cdot x - (4 - x^2)}{x^2} = \frac{-2x^2 - 4 + x^2}{x^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{-x^2 - 4}{x^2} = -\dfrac{x^2 + 4}{x^2} < 0$ για κάθε $x > 0$. Άρα επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, τότε είναι και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, και επομένως “1-1”.

ii) Ισχύει $\pi > e \xRightarrow{f \searrow} f(\pi) < f(e) \Rightarrow \dfrac{4-\pi^2}{\pi} < \dfrac{4-e^2}{e} \Rightarrow (4-\pi^2)e < (4-e^2)\pi \xRightarrow{4-e^2<0}$

$\xRightarrow{4-e^2<0} \dfrac{(4-\pi^2)e}{(4-e^2)e} > \dfrac{(4-e^2)\pi}{(4-e^2)e} \Rightarrow \dfrac{4-\pi^2}{4-e^2} > \dfrac{\pi}{e}$

B3. <u>Κατακόρυφες</u>:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{4-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{4}{x} - \dfrac{x^2}{x}\right) = +\infty$. Άρα η $x=0$ (άξονας των $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

<u>Πλάγιες</u>:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{4-x^2}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4-x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1 = \lambda$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4-x^2}{x} + x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4-x^2+x^2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x} = 0 = \beta$.

Άρα η $y=-x$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της f στο +∞.

Οριζόντια ασύμπτωτη δεν δέχεται στο +∞.

B4. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4}{x} - x\right) = 0-(+\infty) = -\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)} \cdot \sigma\upsilon\nu(1+x^2) = 0$,

διότι $\left|\dfrac{1}{f(x)} \cdot \sigma\upsilon\nu(1+x^2)\right| = \left|\dfrac{1}{f(x)}\right| \cdot |\sigma\upsilon\nu(1+x^2)| \leq \left|\dfrac{1}{f(x)}\right|$.

Άρα $-\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| \leq \dfrac{1}{f(x)} \cdot \sigma\upsilon\nu(1+x^2) \leq \left|\dfrac{1}{f(x)}\right|$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|\right) = 0 \end{array}\right\}$ Επομένως, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)} \cdot \sigma\upsilon\nu(1+x^2) = 0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $\int_2^3 xf(x)dx = \int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)dx = \int_2^3 (1+\alpha x)dx = \left[x+\frac{\alpha x^2}{2}\right]_2^3 = \left(3+\frac{9\alpha}{2}\right)-(2+2\alpha) =$

$=1+\frac{5\alpha}{2}$.

Επομένως $\int_2^3 xf(x)dx = 1 \Leftrightarrow 1+\frac{5\alpha}{2}=1 \Leftrightarrow \alpha=0$.

Γ2. **i)** Ελέγχω αν η f είναι συνεχής στο $x=1$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2-3x+3)=1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x}\right)=1=f(1)$$

Επειδή $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$, η f είναι συνεχής στο $x=1$.

Ελέγχω αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{x-1}} = -1.$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{1-x}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{-\cancel{(x-1)}}{x\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1^+} -\frac{1}{x} = -1.$$

Επειδή $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -1 \in R$, η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(1)=-1$.

ii) Είναι $f'(1)=-1=\varepsilon\varphi\hat{\omega}$, όπου $\hat{\omega}$ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον x΄x, επομένως $\hat{\omega}=135°$, και η εφαπτομένη είναι:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-1=-1(x-1) \Leftrightarrow y=-x+1+1 \Leftrightarrow y=-x+2.$$

Γ3. Για $x<1$, η $f(x)=x^2-3x+3$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυώνυμο με $f'(x)=2x-3<0$, καθώς $x<1 \Leftrightarrow 2x<2 \Leftrightarrow 2x-3<-1<0$, επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα για $x\in(-\infty, 1)$.

Για $x>1$ η $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$, επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα για $x\in(1, +\infty)$.

Εφόσον η f είναι συνεχής στο $x=1$, η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\in R$, δηλαδή “1-1”.

Το σύνολο τιμών θα είναι: $f(R) \xrightarrow[\text{φθίνουσα}]{\text{f γνησίως}} \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right) = (0, +\infty)$

με $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.

Γ4. $\Omega = \int_1^2 |f(x)-y|dx + \int_2^e |f(x)|dx$, όπου

$f(x)-y = \frac{1}{x}+x-2 = \frac{1+x^2-2x}{x} = \frac{x^2-2x+1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} > 0$ και $f(x)=\frac{1}{x}>0$.

Άρα $\Omega = \int_1^2 (f(x)-y)dx + \int_2^e f(x)dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x}+x-2\right)dx + \int_2^e \frac{1}{x}dx =$

$= \left[\ln x + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 + [\ln x]_2^e = \cancel{\ln 2} + \cancel{2} - \cancel{4} - \cancel{\ln 1} - \frac{1}{2} + \cancel{2} + \ln e - \cancel{\ln 2} = \ln e - \frac{1}{2} =$

$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. $f: (0,2)\to R$

$f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + \kappa,\ \kappa\in R$

$\lim\limits_{x\to1} \frac{f(x)-2x}{x-1} = \ell \in R$

Θέτω $g(x) = \frac{f(x)-2x}{x-1}$ για $x\neq1$ με $\lim\limits_{x\to1} g(x) = \ell\in R$.

Είναι $f(x) = g(x)(x-1)+2x$ και $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1}[g(x)(x-1)+2x] = \ell\cdot0+2 = 2$.

Η f είναι συνεχής στο $x=1$ ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, επομένως

$f(1) = \lim\limits_{x\to1} f(x) \Leftrightarrow \ln(2-1) - \frac{1}{1} + \kappa = 2 \Leftrightarrow \kappa = 3$.

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη για $x\in(0,2)$ ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = \frac{1}{2-x}(2-x)' + \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2-x} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2-x+2}{x^2(2-x)}$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -x^2-x+2=0$ με ρίζες $x_1=1$ και $x_2=-2$ που απορρίπτεται.

Επομένως

x	0	1	2
f′	+	0	-
f	↗		↘

Ο.Μ.

Είναι $f((0,1])=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), f(1)\right)=(-\infty, 2]$, αφού $f(1)=2$

και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\ln 2-(+\infty)+3=-\infty$,

και επειδή $0\in f((0,1])=(-\infty,2]$ υπάρχει ένα ακριβώς $x_1\in(0,1)$ (εφόσον για $x\in(0,1)$ η f είναι γνησίως αύξουσα) έτσι ώστε $f(x_1)=0$.

$f((1,2))=\left(\lim\limits_{x\to 2^-} f(x), \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\right)=(-\infty,2)$,

αφού $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3\right)=-\infty-\frac{1}{2}+3=-\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 2^-}\ln(2-x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln u=-\infty$.

Θέτω $2-x=u$, έτσι όταν $x\to 2^-$, το $u\to 0^+$.

Επομένως, επειδή $0\in f((1,2))$ υπάρχει ένα ακριβώς $x_2\in(1,2)$ (εφόσον για $x\in(1,2)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα) έτσι ώστε $f(x_2)=0$.

Συνεπώς η $f(x)=0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες με $x_1<1<x_2$.

Είναι $f\left(\frac{1}{3}\right)=\ln\left(2-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{\frac{1}{3}}+3=\ln\left(\frac{5}{3}\right)-3+3=\ln\left(\frac{5}{3}\right)$.

Ισχύει $\frac{5}{3}>1\Leftrightarrow \ln\left(\frac{5}{3}\right)>\ln 1\Leftrightarrow \ln\left(\frac{5}{3}\right)>0\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{3}\right)>f(x_1) \xLeftrightarrow[x\in(0,1)]{\text{f γνησίως αύξουσα}} x_1<\frac{1}{3}$.

Δ3. Η f είναι συνεχής για κάθε $x\in\left[x_1,\frac{1}{3}\right]$ και παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\left(x_1,\frac{1}{3}\right)$.

Από Θ.Μ.Τ. συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(x_1,\frac{1}{3}\right)\subseteq(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f\left(\frac{1}{3}\right)-\cancel{f(x_1)}^{\,0}}{\frac{1}{3}-x_1}\Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}.$$

Η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\in(0,1)$, με $f''(x)=\left(-\frac{1}{2-x}+\frac{1}{x^2}\right)'=$

$$=\frac{(2-x)'}{(2-x)^2}+\frac{-(x^2)'}{(x^2)^2}=-\frac{1}{(2-x)^2}-\frac{2x}{x^4}=-\frac{1}{(2-x)^2}-\frac{2}{x^3}<0,$$

επομένως η f' είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\in(0,1)$, και άρα το ξ είναι μοναδικό.

Δ4. **i)** Η F είναι αρχική της f, άρα $F'(x)=f(x),\ x\in(0,2)$.

Η G είναι αρχική της f, άρα $G'(x)=f(x),\ x\in(0,2)$.

Επειδή $F'(x)=G'(x)$ ισχύει $F(x)=G(x)+c,\ c\in R$ (1)

Είναι $F(x_1)=G(x_2)=0$, άρα για $x=x_1$ η (1) δίνει $F(x_1)=G(x_1)+c\Leftrightarrow G(x_1)=-c$ (2)

Για $x=x_2$, η (1) δίνει $F(x_2)=G(x_2)+c\Leftrightarrow F(x_2)=c$ (3)

Από (2), (3) : $F(x_2)+G(x_1)=c-c=0$.

ii) Ορίζω $h(x)=x_1F(x)+x_2G(x)-x_1-x_2+2x$ με $x\in[x_1,x_2]$, συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$h(x_1)=x_1F(x_1)+x_2G(x_1)-x_1-x_2+2x_1=-x_1F(x_2)-x_2+x_1=-[x_1F(x_2)+(x_2-x_1)]$

$h(x_2)=x_1F(x_2)+x_2G(x_2)-x_1-x_2+2x_2=x_1F(x_2)+x_2-x_1$

Αφού $h(x_1)+h(x_2)=0$, είναι $h(x_1)\cdot h(x_2)<0$

Επομένως, από Θεώρημα Bolzano υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0\Leftrightarrow x_1F(x_0)+x_2G(x_0)=x_1+x_2-2x_0$

Είναι $h(x)$ παραγωγίσιμη με $x\in(x_1,x_2)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$h'(x)=x_1f(x)+x_2f(x)+2$

Για $x_1<x\leqslant 1\xRightarrow{f\nearrow}f(x_1)<f(x)\Leftrightarrow f(x)>0$

Για $1\leqslant x<x_2\xRightarrow{f\searrow}f(x_2)<f(x)\Leftrightarrow f(x)>0$

Επομένως $f(x)>0$ για $x\in(x_1,x_2)$ άρα $h'(x)>0$ άρα η h γνησίως αύξουσα για $x\in(x_1,x_2)$, οπότε το x_0 είναι μοναδικό

Οι παραπάνω απαντήσεις είναι ενδεικτικές