ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΕΠΑΛ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1.
Έστω $g(x)=c\cdot f(x)$

$$(c\cdot f(x))'=g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c\cdot f(x+h)-c\cdot f(x)}{h}=$$
$$=c\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=c\cdot f'(x)$$

Α2. Σχολ. Βιβλίο «Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής» – σελ. 22

Α3. **α) Λάθος** **β) Σωστό** **γ) Σωστό** **δ) Λάθος** **ε) Σωστό**

ΘΕΜΑ Β

$$f(x)=2x^3+\alpha x^2-12x+10$$

Β1. $f'(x)=(2x^3+\alpha x^2-12x+10)'=6x^2+2\alpha x-12$

Β2. Εφαπτομένη παράλληλη στον x΄x στο $x_0=1$:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 6\cdot 1^2+2\alpha\cdot 1-12=0\Leftrightarrow$$
$$2\alpha-6=0\Leftrightarrow$$
$$2\alpha=6\Leftrightarrow \alpha=3$$

Β3. Για $\alpha=3$ $\quad f(x)=2x^3+3x^2-12x+10$

$$f'(x)=6x^2+6x=12$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 6x^2+6x-12=0\Leftrightarrow x^2+x-2=0$$

$\Delta=9 \qquad x_1=1 \qquad x_2=-2$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	
			Τ.Μ.		Τ.Ε.		

η f γνησίως αύξουσα $x\in(-\infty,-2]$
η f γνησίως φθίνουσα $x\in[-2,1]$
η f γνησίως αύξουσα $x\in[1,+\infty)$

Η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=-2$ με τιμή

$f(-2)=2(-2)^3+3(-2)^2-12(-2)+10=$

$=2(-8)+3\cdot 4+24+10=-16+12+24+10=30$

Η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=1$ με τιμή

$f(1)=2\cdot 1^3+3\cdot 1^2-12\cdot 1+10=2+3-12+10=3$

B4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x^2+6x-12}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}}=6(1+2)=18$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $x_3=\dfrac{16+20}{2}=18$, $x_4=\dfrac{20+24}{2}=22$, $x_3\nu_3=18\nu_3$, $x_4\nu_4=22\cdot 5=110$

$\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=\nu \Leftrightarrow 20+15+\nu_3+5=\nu \Leftrightarrow 40+\nu_3=\nu$

$\bar{x}=14\Leftrightarrow \dfrac{1}{\nu}\cdot\sum\limits_{i=1}^{4}x_i\nu_i=14\Leftrightarrow \dfrac{1}{\nu}\cdot(200+210+18\nu_3+110)=14\Leftrightarrow$

$520+18\nu_3=14\nu \Leftrightarrow 520+18\nu_3=14(40+\nu_3)\Leftrightarrow 520+18\nu_3=560+14\nu_3\Leftrightarrow$

$4\nu_3=40\Leftrightarrow \nu_3=10$

Γ2.

Κλάσεις	x_i	ν_i	$x_i\nu_i$	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^2\nu_i$
$[8,12)$	10	20	200	- 4	16	320
$[12,16)$	14	15	210	0	0	0
$[16,20)$	18	10	180	4	16	160
$[20,24)$	22	5	110	8	64	320
ΣΥΝΟΛΑ		50	700			800

$\nu=20+15+10+5=50$

$x_3\cdot\nu_3=18\cdot 10=180$

Γ3.

Συμπληρώνω τις στήλες $xi-\bar{x}$, $\left(x_i-\bar{x}\right)^2$ και $\left(x_i-\bar{x}\right)^2 vi$ κάνοντας τους υπολογισμούς.

$$s^2=\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{4}\left(xi-\bar{x}\right)^2\cdot vi=\frac{1}{5\cancel{0}}\cdot 80\cancel{0}\Rightarrow \boxed{s^2=16}$$

Γ4.

$s=\sqrt{s^2}=\sqrt{16}\Rightarrow s=4$

$CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{4}{14}\simeq 0,2857$ ή 28,57% > 10%. Άρα <u>ΔΕΝ</u> είναι ομοιογενές.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

$f(x)=-\frac{1}{x^2}$ **με** $x\neq 0$

Δ1. $f(x)=-\frac{1}{x^2}=-x^{-2}$

$f'(x)=(-x^{-2})=-(-2)x^{-3}=2x^{-3}=\frac{2}{x^3}$

Για $x<0\Leftrightarrow x^3<0 \quad f'(x)<0$.

Επομένως η f γνησίως φθίνουσα $x\in(-\infty,0)$

Για $x>0\Leftrightarrow x^3>0 \quad f'(x)>0$.

Επομένως η f γνησίως αύξουσα $x\in(0,+\infty)$

Δ2.

$x\in[-4,-1]\Leftrightarrow -4\leqslant x\leqslant -1\xrightarrow{f\searrow \text{ στο } (-\infty,0)} f(-1)\leqslant f(x)\leqslant f(-4)\Leftrightarrow$

$-\frac{1}{(-1)^2}\leqslant f(x)\leqslant -\frac{1}{(-4)^2}\Leftrightarrow -1\leqslant f(x)\leqslant -\frac{1}{16}$

Δ3. $x_0=1$, $f(x_0)=f(1)=-\frac{1}{1^2}=-1$, $f'(x_0)=f'(1)=\frac{2}{1^3}=2$

Άρα (ε) : $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-(-1)=2(x-1)\Leftrightarrow y+1=2x-2\Leftrightarrow$

$y=2x-3$

Δ4.

Για τις τετμημένες x_i γνωρίζουμε : $\bar{x}=4$ και $s_x=2$

Για τις τεταγμένες y_i θα ισχύει : $y_i = 2x_i - 3$

Άρα $\bar{y} = 2\bar{x} - 3 \Leftrightarrow \bar{y} = 2 \cdot 4 - 3 = 5$ και $s_y = 2s_x = 2 \cdot 2 \Leftrightarrow s_y = 4$

Επομένως $CV_y = \dfrac{s_y}{\bar{y}} = \dfrac{4}{5} = 0,8$ ή 80%