ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ, ΣΕΛ. 186 – Απόδειξη Θεωρήματος Παραγουσών

Α2. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ, ΣΕΛ. 142 – Διατύπωση Θεωρήματος Fermat

Α3. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ, ΣΕΛ. 161 – Ορισμός κατακόρυφης ασύμπτωτης

Α4. α. Σ
β. Σ
γ. Σ
δ. Λ
ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

f: $(-\infty, 1] \to R$, $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$, $D_f = (-\infty, 1]$

g: $[0, +\infty) \to R$, $g(x) = \sqrt{x}$, $D_g = [0, +\infty)$

Β1.

$D_{fog} = D_h = \{x \in D_g \ / \ g(x) \in D_f\} \Leftrightarrow \left\{x \geqslant 0 \ / \ \sqrt{x} \leqslant 1\right\} \Leftrightarrow \{x \geqslant 0 \ / \ x \leqslant 1\} = [0, 1]$ και

τύπο $h(x) = (fog) = f(g(x)) = \left(\sqrt{x}\right)^4 - 2\left(\sqrt{x}\right)^2 + 1 \overset{x \geqslant 0}{=} x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

Άρα $h(x) = (x-1)^2, \ x \in [0, 1]$

Β2. Η συνάρτηση h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ ως πολυωνυμική

$h'(x) = [(x-1)^2]' = 2(x-1)(x-1)' = 2(x-1)$

$h'(x) = 2(x-1) \leqslant 0 \quad \forall x \in [0, 1]$.

Άρα η h γνησίως φθίνουσα και επομένως η h “1-1” άρα αντιστρέφεται

Τότε $h: [0, 1] \overset{\searrow}{\to} [h(1), h(0)] = [0, 1]$

Άρα σύνολο τιμών της h το $[0, 1]$

$$\begin{cases} y = (x-1)^2 \\ y \in [0, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = |x-1| \\ y \in [0, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = 1 - x \\ y \in [0, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{y} \\ y \in [0, 1] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y} \\ y \in [0, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x} \\ x \in [0, 1] \end{cases}$$

Β3. $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{h^{-1}(x)}{1-x}, & x \in [0, 1) \\ \dfrac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$

i) Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[0,1)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

Επίσης $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{h^{-1}(x)}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 1}=\dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{-1}=$

$=\lim\limits_{x\to}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}=\varphi(1)$

Άρα η φ συνεχής στο $[0,1]$

Επίσης $\left.\begin{matrix}\varphi(0)=\dfrac{1-0}{1-0}=1\\ \varphi(1)=\dfrac{1}{2}\end{matrix}\right\}$ $\varphi(0)\neq\varphi(1)$, άρα για την φ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών.

ii) $\varphi(x_0)=\eta\mu\alpha$, θεωρούμε τη συνάρτηση $\kappa(x)=\varphi(x)-\eta\mu\alpha$, όπου

$\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\overset{\eta\mu\nearrow}{\Leftrightarrow}\eta\mu\dfrac{\pi}{6}<\eta\mu\alpha<\eta\mu\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}<\eta\mu\alpha<1 \quad (1)$

- Η κ(x) είναι συνεχής στο $[0,1]$
- $\kappa(0)=\varphi(0)-\eta\mu\alpha\overset{(1)}{=}1-\eta\mu\alpha>0$
- $\kappa(1)=\varphi(1)-\eta\mu\alpha\overset{(1)}{=}\dfrac{1}{2}-\eta\mu\alpha<0$

Άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\kappa(x_0)=0\Leftrightarrow\varphi(x_0)-\eta\mu\alpha=0\Leftrightarrow\varphi(x_0)=\eta\mu\alpha$

ΘΕΜΑ Γ

$f:R\to R$ με $f(0)=0$

Γ1. $f'(x)=\begin{cases}-2, & x<-1\\ 3x^2-1, & x>-1\end{cases}$

- για $x<-1$ $\quad f'(x)=-2=(-2x)'\Rightarrow f(x)=-2x+c_1$
- για $x>-1$ $\quad f'(x)=3x^2-1=(x^3-x)'\Rightarrow f(x)=x^3-x+c_2$
- για $x=0$ $\quad f(0)=0^3+0+c_2\Rightarrow c_2=0$

Άρα $f(x)=x^3-x$, για κάθε $x>-1$

Επειδή η συνάρτηση f ορίζεται σε όλο το R ισχύει

$$f(x)=\begin{cases}-2x+c_1, & x<-1\\ c_3, & x=-1\\ x^3-x, & x>-1\end{cases}$$

Η συνάρτηση f ως παραγωγίσιμη είναι και συνεχής

Άρα $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow 2 + c_1 = 0 = c_3 \Leftrightarrow c_3 = 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; c_1 = -2$

$$f(x) = \begin{cases} -2x-2, & x<-1 \\ 0, & x=-1 \\ x^3 - x, & x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} -2x-2, & x\leq -1 \\ x^3 - x, & x>-1 \end{cases}$$

Γ2. (ε) $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ (1) , $x_0 > -1$

Όπου $f(x_0) = x_0 - x_0$ και $f'(x_0) = 3x_0 - 1$

Η (ε) τέμνει τον y'y στο -2, άρα $(0, -2) \in (\varepsilon)$

(1) $\Rightarrow -2 - (x_0{}^3 - x_0) = (3x_0 - 1)(0 - x_0)$

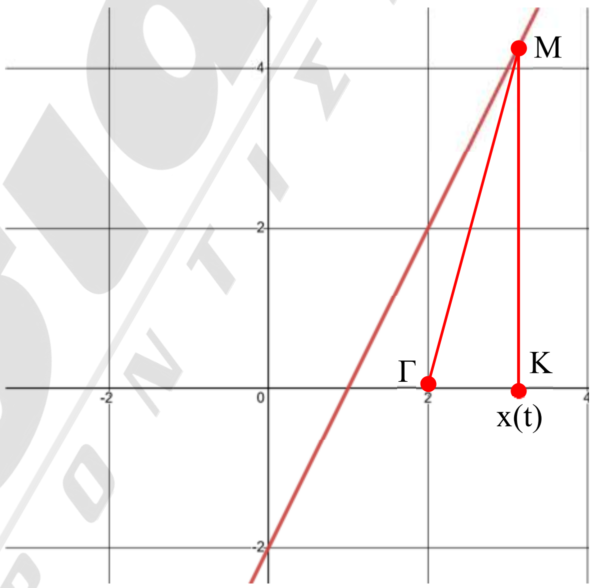
(ε) : $-2 - x_0{}^3 + x_0 = -3x_0{}^3 + x_0$

(ε) : $2x_0{}^3 = 2 \Leftrightarrow x_0{}^3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$

Επομένως (ε) : $y - f(1) = f'(1)(x-1)$

(ε) : $y = 2x - 2$, όπου $f(1) = 0$, $f'(1) = 2$

Γ3. $x(t_0) = 3$, $x'(t) = 2\ m/\sec$, $y(t_0) = 4$



$y(t) = 2x(t) - 2 \Rightarrow y'(t) = 2x'(t) = 2\cdot 2 = 4\ m/\sec$

$$E = \frac{(MK)\cdot(K\Gamma)}{2}$$

$$E(t) = \frac{y(t)\cdot(x(t)-2)}{2}$$

$$E'(t) = \frac{1}{2}\left[y'(t)\,(x(t)-2) + y(t)\,(x'(t))\right]$$

Θέτω $t \to t_0$

$$E'(t_0) = \frac{1}{2}\left[y'(t_0)\,(x(t_0)-2) + y(t_0)\,(x'(t_0))\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[4(3-2) + 4\cdot 2\right] = \frac{1}{2}(4+8) = 6\ m^2/\sec$$

Γ4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \dfrac{f(-x)}{1-x^3}\right] = \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f(-x)}{1-x^3} = \ell$

- $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$, ισχύει $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}(-2x-2) = +\infty$

  Επίσης $\left|\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right| = \left|\dfrac{1}{f(x)}\right| |\eta\mu f(x)| \leq \left|\dfrac{1}{f(x)}\right|$, άρα

  $-\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| \leq \eta\mu\dfrac{f(x)}{f(x)} \leq \left|\dfrac{1}{f(x)}\right|$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0$ διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} -\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|=0$ τότε από κριτήριο παρεμβολής και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(-x)}{1-x^3}$ ισχύει : $x\to-\infty$ τότε $-x\to+\infty$, άρα $f(-x)=x^3-x$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-x}{1-x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(x^2-1)}{(1-x)(1^2+x+x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(x-1)(x+1)}{-(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x^2+x}{x^2+x+1}\right)\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}-\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=-1$$

Άρα $\ell=0-1=-1$

ΘΕΜΑ Δ

$f(x)=x-\ln(3x),\ \ x>0$

Δ1. Η f είναι συνεχής και παραραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

i) $f'(x)=1-\dfrac{1}{3x}(3x)'=1-\dfrac{3}{3x}=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$

$f'(x)>0\Leftrightarrow x>1,\ \ f'(x)<0\Leftrightarrow x<1$

x	0	1	+∞
f′	−	0	+
f	↘		↗

Ο.Ε.

Για $x=1$ η f παρουσιάζει ελάχιστο το $f(1)=1-\ln3<0$ διότι

$e<3\Leftrightarrow \ln e<\ln3\Leftrightarrow 1-\ln3<0$

- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x-\ln3x)=-(-\infty)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln3x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1-\dfrac{\ln3x}{x}\right)\right]=+\infty$
- Όπου $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln3x}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

Αν $A_1=(0,1]$ τότε $f{:}A_1\overset{\searrow}{\to}\left[f(1),\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\right)=[1-\ln3,+\infty)$

Αν $A_2=(1,+\infty)$ τότε $f{:}A_2\overset{\nearrow}{\to}\left(\lim\limits_{x\to1^+}f(x)\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(1-\ln3\ ,\ +\infty)$

Αλλά $0\in f(A_1)$ και επίσης το $0\in f(A_2)$, άρα υπάρχει $x_1\in A_1$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$ και $x_2\in A_2$ ώστε $f(x_2)=0$

Όπου $x_1 \in (0,1)$ και $x_2 \in (1,+\infty)$

ii) $f(x) = x - \ln(3x)$

$f'(x) = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$

$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$, άρα η f ως συνεχής θα είναι κυρτή

Δ2. Ισχύει $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$, άρα το εμβαδόν του χωρίου δίνεται από τον τύπο

$$E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx$$

- για $x_1 < x < 1 \overset{f \searrow}{\Rightarrow} f(x_1) > f(x) > f(1) \Rightarrow f(1) < f(x) < f(x_1)$
  άρα $1 - \ln 3 < f(x) < 0$, επομένως $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_1, 1)$
- για $1 < x < x_2 \overset{f \nearrow}{\Rightarrow} f(1) < f(x) < f(x_2) \Rightarrow 1 - \ln 3 < f(x) < 0$
  επομένως $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, x_2)$

Άρα για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ η $f(x) < 0$

Τότε $\int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx = -\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = -\int_{x_1}^{x_2} (x - \ln 3x) dx = -\underbrace{\int_{x_1}^{x_2} x dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \ln 3x dx}_{I_2}$

$$I_1 = \int_{x_1}^{x_2} x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{{x_2}^2}{2} - \frac{{x_1}^2}{2} = \frac{{x_2}^2 - {x_1}^2}{2}$$

$$I_2 = \int_{x_1}^{x_2} x' \ln 3x dx = [x \ln 3x]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} x \frac{1}{x} dx = [x \ln 3x]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} 1 dx =$$

$$= [x \ln 3x]_{x_1}^{x_2} - [x]_{x_1}^{x_2} = x_2 \ln 3x_2 - x_1 \ln 3x_1 - x_2 + x_1 = x_2 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_1 - x_2 + x_1 =$$

$$= {x_2}^2 - {x_1}^2 - (x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - (x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 1)$$

Άρα $I = -I_1 + I_2 = -\frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{2} + (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 1) =$

$$= -\frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + 2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 1)}{2} =$$

$$= -\frac{(x_2 - x_1)[x_2 + x_1 - 2(x_2 + x_1 - 1)]}{2} = -\frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2x_2 - 2x_1 + 2)] =$$

$$= -\frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(-x_2 - x_1 + 2)] = \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2)]$$

Δ3. Ισχύει $x_1 < 1 \Rightarrow -x_1 > -1 \Rightarrow 2 - x_1 > 1$

Τότε $f(2 - x_1) < 0 \Rightarrow f(2 - x_1) < f(x_2) \overset{f \nearrow}{\Rightarrow} 2 - x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 > 2$

Αυτό όμως ισχύει διότι από το προηγούμενο ερώτημα $E = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2) > 0$

Άρα $x_2 + x_1 - 2 > 0$, επομένως $f(2 - x_1) < 0$

Δ4. $2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2)$

$2f(x) + \ln 3 - 1 = f'(x_2)(x - x_2)$

$2f(x) - f(1) = f'(x_2)(x - x_2) \quad (1)$

Αλλά η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(x_2, f(x_2))$ είναι

$(\varepsilon): y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \overset{f(x_2)=0}{\Rightarrow} y = f'(x_2)(x - x_2)$

Επίσης η f κυρτή για κάθε $x \in D_f$, άρα $f(x) \geqslant y$ όπου το «=» ισχύει μόνο για το σημείο επαφής

Άρα $f(x) > f'(x_2)(x - x_2) \quad (2)$

Επίσης η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$, το $f(1) = 1 - \ln 3$

Άρα $f(x) \geqslant 1 - \ln 3 \quad (3)$

Τότε $(2) + (3) \Rightarrow 2f(x) > 1 - \ln 3 + f'(x_2)(x - x_2)$

Άρα $(1) \Rightarrow 2f(x) = f(1) + f'(x_2)(x - x_2)$

Άρα δεν υπάρχει λύση x της εξίσωσης

Οι παραπάνω απαντήσεις είναι ενδεικτικές