

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  
**ΣΑΒΒΑΤΟ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2022**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.) του Διαφορικού Λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

**Μονάδες 4**

**A4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .

**β)** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν  $f(x) \geq 0$ , για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ , τότε  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$ .

**γ)** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε  $f'(x_0) = 0$ .

**δ)** Ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$ .

**ε)** Η συνάρτηση  $f(x) = \ln|x|$ ,  $x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ , είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  και ισχύει:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } f(x) = \frac{x}{x-1} \text{ και}$$

$$g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } g(x) = \ln x.$$

**B1.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες και οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 6**

**B2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = g(x)$  έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα  $(e, e^2)$ .

**Μονάδες 8**

**B3.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $\varphi = g \circ f$ .

**Μονάδες 6**

**B4.** Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση με τύπο  $h(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ . Αν

$$\varphi(x) = \ln x - \ln(x-1), \quad x \in (1, +\infty),$$

να εξετάσετε αν  $\varphi = h$ .

**Μονάδες 5**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- Η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu x}{x} = 0.$

- $f'(x)f''(x) = x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Γ1.** i. Να αποδείξετε ότι  $f(0) = 0$  και  $f'(0) = 1$  (μονάδες 4).

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο με τετμημένη  $x_0 = 0$  (μονάδες 2).

**Μονάδες 6**

Γ2. Να αποδείξετε ότι  $f'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 8**

Γ3. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

**Μονάδες 4**

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι «1-1» (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f^{-1}$  (μονάδες 5).

**Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x + 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ x^x, & 0 < x \leq \frac{2}{e}. \end{cases}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής αλλά μη παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$ .

**Μονάδες 6**

Δ2. i. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της  $f$  (μονάδες 3).

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$  (μονάδες 5).

**Μονάδες 8**

Δ3. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\alpha, \beta \in \left[-1, \frac{2}{e}\right]$  υπάρχει  $\xi \in \left[-1, \frac{2}{e}\right]$  τέτοιο ώστε  $f(\xi) = \frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5}$ .

**Μονάδες 5**

Δ4. Να αποδείξετε ότι  $\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} x f(x) dx > \left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}} - \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ .

**Μονάδες 6**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**