ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΕΠΑΛ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h)^{h} = 2x+0 = 2x$$

Α2. Σχολ. Βιβλίο «Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής» – σελ. 87

Α3. **α) Λάθος** **β) Σωστό** **γ) Λάθος**

Α4. **α.** $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

β. $(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\bar{x} = \dfrac{1}{\cancel{5}}\cdot\sum_{i=1}^{5} xi = \dfrac{1}{5}\cdot(25+10+5+20+15) = \dfrac{75}{5} = 15$

R = max-min = 25-5 = 20

Β2.

$\left(t_i-\bar{x}\right)$	$\left(t_i-\bar{x}\right)^2$
$25-15=10$	100
$10-15=-5$	25
$5-15=-10$	100
$20-15=5$	25
$15-15=0$	0
	250

$$s^2 = \frac{1}{5}\cdot\Sigma\left(t_i-\bar{x}\right)^2 = \frac{1}{5}\cdot 250 = 50$$

Β3. $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot 2}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

CV= $\dfrac{s}{\bar{x}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{15}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}>\dfrac{1}{3}\simeq 0,33$ άρα CV>10% οπότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ

$f(x)=x^3-9x^2+\alpha x+1$, **x, α**$\in R$

Γ1. Άρα $f'(1)=0$

$f'(x)=(x^3-9x^2+\alpha x+1)'=3x^2-18x+\alpha$

Επομένως $f'(1)=0 \Leftrightarrow 3\cdot 1^2-18\cdot 1+\alpha=0 \Leftrightarrow 3-18+\alpha=0 \Leftrightarrow$ α=15

οπότε $f(x)=x^3-9x^2+15x+1$ και $f'(x)=3x^2+18x+15$

Γ2.

$f(2)=2^3-9\cdot 2^2+15\cdot 2+1=8-36+30+1=3$

$f'(2)=3\cdot 2^2-18\cdot 2+15=12-36+15=-9$

$x_o=2,\ f(x_o)=3,\ f'(x_o)=-9$

$y=-f(x_o)=f'(x_o)\cdot(x-x_o) \Leftrightarrow y-3=-9(x-2) \Leftrightarrow$

$y=-9x+18+3 \Leftrightarrow y=-9x+21$

Γ3. $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-18x+15=0 \Leftrightarrow x^2-6x+5=0$

Δ=$\beta^2-4\alpha\gamma=(-6)^2-4\cdot 1\cdot 5=16>0$

$x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-(-6)\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\dfrac{6+4}{2} \Leftrightarrow$

$x_1=5$ η $x_2=1$

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Τ.Μ. Τ.Ε.

για $x \in (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$ η f γνησίως αύξουσα

για $x \in [1, 5]$ η f γνησίως φθίνουσα

Για $x = 1$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 + 1 = 8$

Για $x = 5$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(5) = 5^3 - 9 \cdot 5^2 + 15 \cdot 5 + 1 = -24$

Γ4.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-18x+15}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{3(x-5)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{3(x-5)}{(x+1)} = \frac{3(1-5)}{(1+1)} = -6$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Πρέπει $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$, άρα $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

Δ2.

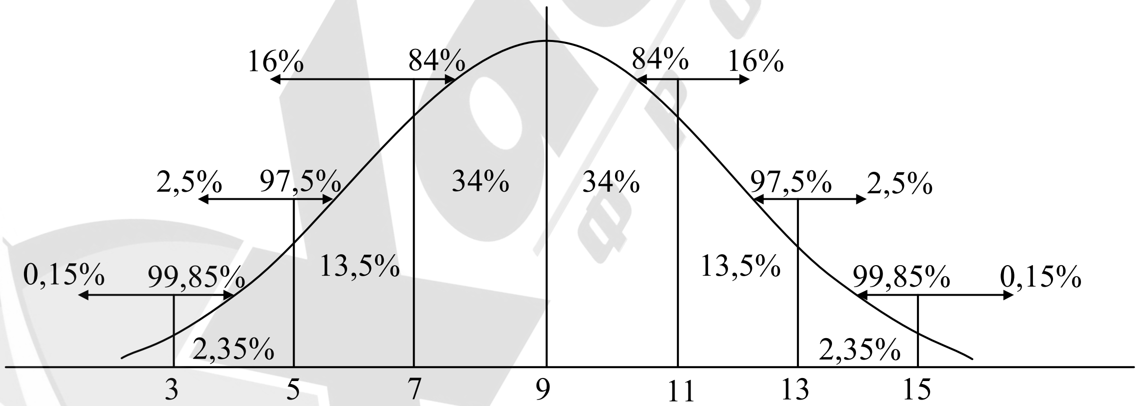
$$f'(2) = \frac{1}{(2+1)^2} = \frac{1}{9}, \qquad f'(1) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9, \qquad s = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 2$$

Δ3. Αφού οι παρατηρήσεις ακολουθούν την κανονική κατανομή, ισχύουν τα παρακάτω :

$\bar{x} - 3s = 9 - 6 = 3$, $\bar{x} - 2s = 9 - 4 = 5$, $\bar{x} - s = 9 - 2 = 7$

$\bar{x} + 3s = 9 + 6 = 15$, $\bar{x} + 2s = 9 + 4 = 13$, $\bar{x} + s = 9 + 2 = 11$



$\nu = 2000$

Από 5 έως 11 λεπτά, δηλαδή $13,5\% + 34\% + 34\% = 81,5\%$ των μαθητών

Άρα $2000 \cdot \frac{81,5}{100} = 1630$ μαθητές

Πάνω από 15 λεπτά είναι το 0,15% των μαθητών, άρα $2000 \cdot \frac{0,15}{100} = 3$ μαθητές

Δ4.

Έστω μεταβλητή Y με $y_i = x_i + 3$.

Τότε ισχύει $\bar{y} = \bar{x} + 3 \Leftrightarrow \bar{y} = 9 + 3 = 12$

Και $s_y = |\alpha| \cdot s_x = 1 \cdot 2 \Leftrightarrow s_y = 2$