ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. σελ.76 σχολικού βιβλίου

Α2. σελ. 104 σχολικού βιβλίου

Α3.

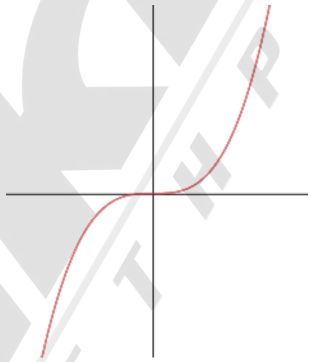
α) Ψ

β) Αντιπαράδειγμα

Έστω $f(x)=x^3$

$f'(x)=3x^2$

Ενώ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ παρόλα αυτά $f'(x)\geqslant 0$ και όχι $f'(x)>0$ γιατί για $x=0$ $f'(x)=0$



Α4. Λ, Σ, Σ, Σ, Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$, $g(x)=e^x$

$D_f=(1,+\infty)$, $D_g=R$

Για να ορίζεται η $(f\circ g)(x)$, πρέπει

$A'=[x\in A_g\ /\ g(x)\in A_f]\neq 0$

$=x\in A_g$ και $g(x)\in A_f$

$x\in R$ και $e^x\in(1,+\infty)$

$e^x>1$

$e^x>e^0$

$x>0$

Άρα $A'=(0,+\infty)$ και έχει τύπο $f(g(x))=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$

Β2.

Έστω $h(x)=(f\circ g)(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$

Η h παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $h'(x)=\dfrac{(e^x+2)'(e^x-1)-(e^x+2)(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}=$

$$=\frac{e^x(e^x-1)-e^x(e^x+2)}{(e^x-1)^2}=\frac{e^{2x}-e^x-e^{2x}-2e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{-3e^x}{(e^x-1)^2}<0$$

Και αφού η h συνεχής στο $(0,+\infty)$ με $h'(x)<0$, είναι γνησίως φθίνουσα

Θεωρώ $y=h(x)\Rightarrow y=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}\Rightarrow (e^x-1)y=e^x+2\Rightarrow e^x y-y=e^x+2\Rightarrow e^x y-e^x=2+y\Rightarrow$

$e^x(y-1)=y+2$ για $y\neq 1$

$e^x=\dfrac{y+2}{y-1}$, Πρέπει $\dfrac{y+2}{y-1}>0$

y	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$y+2$	$-$	0 $+$		$+$
$y-1$	$-$	$-$		$+$
	$+$	$-$		$+$

$x=\ln\dfrac{y+2}{y-1}$, άρα $\varphi(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$ με

$D_\varphi=(-\infty,2)\cup(1,+\infty)$

Β3.

$\varphi(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$ με $D_\varphi=(-\infty,2)\cup(1,+\infty)$

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)'=\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{(x+2)'(x-1)-(x+2)(x-1)'}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x-1-(x+2)}{(x+2)^2}=\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}-2}{(x+2)^2}=\frac{-3(x-1)}{(x+2)^3}$$

$\varphi'(x)=0\Rightarrow -3(x-1)=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1$

Η φ δεν είναι συνεχής στο $x=-2$ και στο $(-\infty,-2)$ είναι $\varphi'(x)<0$, άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-2)$

Η φ είναι συνεχής στο $x=1$ και στο $(1,+\infty)$ είναι $\varphi'(x)<0$, άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$-3(x-1)$	$+$	$+$	0	$-$
$(x+2)^3$	$+$	0 $+$		$+$
φ'	$-$	$+$	0	$-$
φ	$\searrow$			$\searrow$

Β4.

$\lim\limits_{x\to 1^+}\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$ (1)

Θέτω $u=\dfrac{x+2}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[(x+2)\dfrac{1}{x-1}\right]=3\cdot(+\infty)=+\infty$

αφού $x\to 1^+$, $x-1\to 0^+$, $\dfrac{1}{x-1}\to+\infty$, δηλαδή έχω όταν $x\to 1^+$, $u\to+\infty$

Επομένως το (1) γίνεται $\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$ (2)

Θέτω $u=\dfrac{x+2}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$, δηλαδή όταν $x\to+\infty$, $u\to 1$

Άρα το (2) γίνεται $\lim\limits_{u\to 1}\ln u=\ln 1=0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Αφού η f είναι συνεχής, θα είναι συνεχής και στο $x=0$. Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$ (1)

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+}(\eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x) &= 0+\lambda\cdot 1=\lambda \\ \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{1-x}-\ln\lambda\right) &= 1-\ln\lambda \\ f(0) &= 1-\ln\lambda \end{aligned}\right\} \overset{(1)}{\Rightarrow} 1-\ln\lambda=\lambda$$

Προφανής ρίζα είναι η $\lambda=1$, αφού $1-\ln 1=1 \Rightarrow 1=1$. Θα δείξουμε ότι είναι και μοναδική

Θεωρώ $s(x)=1-\ln x-x,\ A_s=(0,+\infty)$

$s'(x)=-\dfrac{1}{x}-1<0$, άρα η s γνησίως φθίνουσα αφού συνεχής με $s'(x)<0$ άρα η $\lambda=1$ είναι μοναδική ρίζα

Γ2.

Πρέπει $f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1-1+x}{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(1-x)}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=1+0=1$$

Αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$ τότε $f'(0)=1=\varepsilon\varphi\omega$ άρα $\omega=\dfrac{\pi}{4}$

Γ3. Η συνάρτηση f δεν έχει σημεία που να μην παραγωγίζεται γιατί

για $x<0$ η f παραγωγίσιμη

για $0<x<\dfrac{3\pi}{2}$ η f παραγωγίσιμη και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

Επίσης στο $x=0$ η $f'(x)=1$. Άρα η f παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της.

Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0$

i) για $x<0$ τότε $f'(x)\neq 0$

ii) για $0<x<\dfrac{3\pi}{2}$ τότε $f'(x)=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=0 \Leftrightarrow$

$$\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4} \text{ με } x\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$$

Τότε $x=\dfrac{\pi}{4}$, $x=\dfrac{5\pi}{4}$

Άρα η f' έχει δύο ρίζες.

Επομένως η f έχει δύο κρίσιμα σημεία τα $x=\dfrac{\pi}{4}$ και $x=\dfrac{5\pi}{4}$

Γ4. Δίνεται ότι $\left.\begin{array}{r} \alpha'(t) = -\dfrac{\alpha(t)}{3} \\ \alpha(t_0) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha'(t_0) = \dfrac{1}{3}$

Επίσης $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha)$

για $y = 0 \Rightarrow -f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha) \Rightarrow -\dfrac{1}{1-\alpha} = \dfrac{1}{(1-\alpha)^2}(x-\alpha) \Rightarrow x = 2\alpha - 1$

Άρα $x_{(t)} = 2\alpha_{(t)} - 1$ και $x'_{(t)} = 2\alpha_{(t)}' = \dfrac{2}{3}$ m/s

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.
$f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$

Η f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = e^x + 2x - e$

$f''(x) = e^x + 2 > 0$ και η f' συνεχής στο $\mathbb{R}$

Άρα f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Για τη συνάρτηση f' στο (0,1) εφαρμόζεται θεώρημα Bolzano γιατί η f' συνεχής στο [0,1]

$f'_{(0)} = e^o - e = 1 - e < 0$

$f'_{(1)} = e + 2 - e = 2 > 0$

Τότε $f'_{(0)} \cdot f'_{(1)} < 0$

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in (0,1)$ ώστε $f'(x_0) = 0$.

Επειδή η f' γνησίως αύξουσα η λύση x_0 είναι μηδενική.

Για $x = x_0$ η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το

$f(x_0) = e^{x_0} + {x_0}^2 - ex_0 - 1$ όπου

$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0$

Άρα $f(x_0) = e - 2x_0 + {x_0}^2 - ex_0 - 1$

$f(x_0) = {x_0}^2 - (e+2)x_0 + e - 1$

	$-\infty$	x_0	$+\infty$
f''	+		
f'	−	0	+
f	↘		↗

Ο.Ε.

Δ2. <u>**Α' ΤΡΟΠΟΣ**</u>

Για κάθε $x \neq x_0$ ισχύουν

- $f(x) > f(x_0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0$ και αφού $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$,

τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} \right) = +\infty$

- $\eta\mu \dfrac{1}{x - x_0} \geqslant -1 \Rightarrow \dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \dfrac{1}{x - x_0} \geqslant \dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1$

Επειδή $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1 \right) = +\infty$

Τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \dfrac{1}{x - x_0} \right) = +\infty$

Β' ΤΡΟΠΟΣ

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\etaμ\frac{1}{x-x_0}\right]=\lim_{x\to x_0}\left\{\frac{1}{x-x_0}\left[\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}+(x-x_0)\etaμ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]\right\}=\ell$$

Για $x>x_0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{1}{x-x_0}=+\infty$

$x>x_0\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(x_0)\Leftrightarrow f'(x)>0$ σε μία περιοχή κοντά στο x_0. Άρα $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=+\infty$

Επίσης από : $-1\leqslant\etaμ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\leqslant 1\Leftrightarrow -(x-x_0)\leqslant(x-x_0)\etaμ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\leqslant x-x_0$

- $\lim\limits_{x\to x_0}[-(x-x_0)]=0$
- $\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)=0$

Άρα από κριτήριο Παρεμβολής και το $\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)\etaμ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)=0$

Άρα $\ell=(+\infty)\cdot[(+\infty)+0]=+\infty$

Όμοια και για $x<x_0$ το $\ell=+\infty$

Δ3. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=f(x)+x-x_0,\ \ x\in[x_0,1]$

• Η h συνεχής στο $[x_0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

• $h(x_0)=f(x_0)<0$ αφού $x_0<1$ και f γν. αύξουσα στο $[x_0,1]$

τότε $f(x_0)<f(1)=0$ και $h(1)=f(1)+1-x_0=1-x_0>0$

Οπότε $h(x_0)h(1)<0$

Από Θ. Bolzano η εξίσωση $h(x)=0\Rightarrow f(x)+x=x_0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(x_0,1)$.

Επειδή $h'(x)=f'(x)+1>0$ για κάθε $x\in[x_0,1]$ τότε h γν. αύξουσα στο $[x_0,1]$ και άρα η εξίσωση $f(x)+x=x_0$ έχει μοναδική ρίζα ρ στο $(x_0,1)$.

Δ4. Για κάθε $\kappa\in(\rho,1)$ θα αποδείξουμε ότι

$f(x_0)>f(\rho)(f'(\kappa)+1)\Rightarrow f(x_0)>f(\rho)f'(\kappa)+f(\rho)\Rightarrow f(x_0)-f(\rho)>f(\rho)f'(\kappa)$

Η f συνεχής $[x_0,\rho]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0,ρ) οπότε σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον $\xi\in(x_0,\rho)$: $f'(\xi)=\frac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho-x_0}$

Έχουμε $x_0<\xi<\rho<\kappa<1$ και αφού f΄γν. αύξουσα, τότε

$$f'(\xi)<f'(\kappa)\Rightarrow\frac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho-x_0}<f'(\kappa)\Rightarrow\frac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho}<f'(\kappa)\overset{f(\rho)=x_0-\rho<0}{\Leftrightarrow}$$

$$f(x_0)-f(\rho)>f(\rho)\cdot f'(\kappa)$$

Οι παραπάνω απαντήσεις είναι ενδεικτικές