ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΕΠΑΛ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολ. Βιβλίο «Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής» – σελ. 16, ορισμός

Α2. **α)** **Λ** **β)** **Σ** **γ)** **Λ**

Α3. **α.** $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$ (σελ. 31)

β. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (σελ. 33)

γ. $(\text{συν}x)' = -\,\text{ημ}x$ (σελ. 33)

Α4. Απόδειξη - Σχολ. Βιβλίο «Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής» – σελ. 28-29

ΘΕΜΑ Β

Β1.

	xi	vi	fi%	Ni%	Fi%
x_1	0	20	40	20	40
x_2	1	15	30	35	70
x_3	2	10	20	45	90
x_4	3	5	10	50	100
	ΣΥΝΟΛΟ	**50**	**100**		

Το 40% των μαθητών ΔΕΝ διάβασαν κανένα βιβλίο.
Άρα $x_1 = 0 \Rightarrow F_1 = 40\%$ και $f_1 = 40\%$

$$fi = \frac{vi}{v} \Leftrightarrow fi\% = \frac{vi}{v}\%$$

Για $f_1 = \dfrac{v_1}{v}$, $f_2 = \dfrac{v_2}{v}$, $f_3 = \dfrac{v_3}{v}$, $f_4 = \dfrac{v_4}{v}$

Στο $f_3\% = \dfrac{v_3\%}{v} \Leftrightarrow 20 = \dfrac{10\%}{v} \Leftrightarrow 20v = 10\% \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 20v = 10\cdot 100 \Leftrightarrow 20v = 1000 \Leftrightarrow v = \frac{100\cancel{0}}{2\cancel{0}} \Leftrightarrow v = 50$$

<u>Όμοια</u> στο $f_1 = \dfrac{v_1}{v} \Leftrightarrow 40 = \dfrac{v_1\cdot 10\cancel{0}}{5\cancel{0}} \Leftrightarrow 40 = 2v_1 \Leftrightarrow v_1 = 20$

Στο $f_2 = \dfrac{v_2}{v} \Leftrightarrow 30 = \dfrac{v_2\cdot 100}{50} \Leftrightarrow 30 = 2v_2 \Leftrightarrow v_2 = 15$

Β2.
Ποσοστό μαθητών που έχουν διαβάσει 3 βιβλία :
Θέλει ΑΚΡΙΒΩΣ 3 άρα θέλω το fi % της μέτρησης $x_4 \to f_4\ \% = 10\ \%$

Β3.
Πόσοι μαθητές διάβασαν ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ ένα :
Θέλει το ΠΛΗΘΟΣ των μαθητών που διάβασαν ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ 1⇒1 ή 2 ή 3.
Άρα θέλει το πλήθος των μετρήσεων $x_2,\ x_3,\ x_4$: $v_2 + v_3 + v_4 = 15 + 10 + 5 = 30$
Άρα 30 μαθητές διάβασαν τουλάχιστον ένα βιβλίο

Β4.
Ποσοστό μαθητών που διάβασαν το ΠΟΛΥ 2 βιβλία
Θέλει ποσοστό fi% ή (Fi%) το ΠΟΛΥ 2 βιβλία $\to 0 - 1 - 2$
Άρα $x_1,\ x_2,\ x_3 \to F_3\% = 90\%$
Οπότε το 90% διάβασε το πολύ δύο βιβλία.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ \ f(x) = x^3 - \lambda x^2 + 2 \quad \lambda \in \mathbb{R}$
Ισχύει αφού η f πολυωνυμική $Df = \mathbb{R}$

Γ1.
Η Cf διέρχεται από το Α(-1, -2)
$A(-1, -2) \in Cf \Rightarrow f_{(-1)} = -2$
$(-1)^3 - \lambda \cdot (-1)^2 + 2 = -2$
$-1 - \lambda + 2 = -2 \Leftrightarrow -\lambda = -2 - 2 + 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -\lambda = -4 + 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -\lambda = -3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \boxed{\lambda = 3}$

Γ2.
Άρα (αφού $\boxed{\lambda = 3}$)

- $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

$f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 2)' = (x^3)' - (3x^2)' + (2)' \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 \cdot 2x + 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x$

- $f''(x) = (3x^2 - 6x)' = (3x^2)' - (6x)'$

$f''(x) = 3 \cdot 2x - 6 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f''(x) = 6x - 6$

Γ3.

Μονοτονία – Ακρότατα f

$f(x)=x^3-3x^2+2$

Από Γ2 $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x(x-2)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0$ ή $\begin{matrix} x-2=0 \\ x=2 \end{matrix}$

Πίνακας προσήμων f΄

	$-\infty$	0		2	$+\infty$
f'	+	0	−	0	+

Μονοτονία f

	$-\infty$	0		2	$+\infty$
f'	+	0	−	0	+
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$, $(2,+\infty)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,2)$

Έχει τοπικό μέγιστο στο $x=0$

το $f(0)=2$

τοπικό ελάχιστο στο $x=2$

το $f(2)=8-3\cdot 4+2=8-12+2=-2$

$f(2)=-2$

Γ4.

Από Γ2 για λ=3 έχω $f'(x)=3x^2-6x$

$f''(x)=6x-6$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)+3}{f''}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-6x+3}{6x-6}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\frac{3x^2-6x+3}{6x-6}=\frac{\cancel{3}(x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{6}(x-1)}=\frac{(x-1)}{2}$$

$3x^2-6x+3=3(x^2-2x+1)=3(x-1)^2$

$6x-6=6(x-1)$

Άρα $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{2}\right)=\frac{0}{2}=0$

Β΄τρόπος

$3x^2-6x+3$

$\Delta=6^2-4\cdot3\cdot3=36-36=0$

$x=\frac{-B}{2\alpha}=\frac{6}{6}=1$

Σύμφωνα με τον τύπο παραγοντοποίησης του τριωνύμου για Δ=0, α=3, Ρ=1

$\alpha\cdot(x-p)^2=3\cdot(x-1)^2$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f(x)=(x^2+4x+5)^{20}$

Δ1.

$f'(x)=((x^2+4x+5)^{20})'$ Παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης

$=20\cdot(x^2+4x+5)^{19}\cdot(x^2+4x+5)'$

$=20\cdot(x^2+4x+5)^{19}\cdot(2x+4)$

$=20\cdot(x^2+4x+5)^{19}\cdot2(x+2)$

$=20\cdot2(x^2+4x+5)^{19}\cdot(x+2)$

$=40\cdot(x^2+4x+5)^{19}\cdot(x+2)$

Δ2.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$$

Το παραπάνω όριο είναι ο ορισμός της παραγώγου στο σημείο $x=-2$

Άρα $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=f'(-2)$

$f'(-2)=40((-2)^2+4(-2)+5)^{19}\cdot(-2+2)$

$=40\cdot(4-8+5)^{19}\cdot0$

$=40\cdot1^{19}\cdot0$

$=40\cdot1\cdot0=0$

Δ3.

Εφαπτομένη της C_f ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ στον x'x

$y//x'x\Leftrightarrow\lambda=0\Leftrightarrow f'(x_0)=0$ με λ συντελεστή διεύθυνσης

$f'(x)=0\Leftrightarrow40(x^2+4x+15)^{19}\cdot(x+2)=0$

$40=0$ ή $(x^2+4x+15)^{19}=0$ ή $x+2=0$

ΑΔΥΝΑΤΟ $x^2+4x+15=0$ $x=-2$

$\Delta=4^2-4\cdot1\cdot15$

$=16-60=-44$

ΑΔΥΝΑΤΗ

Άρα $y//x'x \Leftrightarrow f'(x_0)=0 \Leftrightarrow x_0=-2$

Οπότε ψάχνω την εφαπτομένη στο σημείο $(-2,f(-2))$

$y-f(-2)=f'(-2)(x-(-2)) \Leftrightarrow y-f(-2)=0\cdot(x+2) \Leftrightarrow y=f(-2)$

$f(-2)=[(-2)^2+4\cdot(-2)+5]^{20}=(4-8+5)^{20}=(9-8)^{20}=1^{20}=1$

Άρα εφαπτομένη $y=1$

Δ4.

Τύπος απόστασης 2 σημείων :

$(OA)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{x^2+1}$

Ρυθμός μεταβολής : $g'(x)=\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot(x^2+1)' \Leftrightarrow$

$g'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow g'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Για $x=1$: $g'(1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$