ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΕΠΑΛ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **α.** Σχολ. Βιβλίο «Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής» – Απόδειξη σελ. 28 : Η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης

Α2. **α.** Σχολ. Βιβλίο «Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής» – σελ. 59

β. Σχολ. Βιβλίο «Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής» – σελ. 59

Α3. **α) Λ** **β) Σ** **γ) Λ** **δ) Λ** **ε) Σ**

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Αφού $s^2 = 4 \Leftrightarrow s = \sqrt{4} \Leftrightarrow s = 2$, οπότε $CV = 20\% = 0,2$

$$Άρα\ \frac{s}{|\overline{x}|} = 0,2 \Leftrightarrow \frac{2}{|\overline{x}|} = 0,2 \Leftrightarrow |\overline{x}| = \frac{2}{0,2} \Leftrightarrow |\overline{x}| = 10 \Leftrightarrow \boxed{\overline{x} = 10}$$

$ή \quad \overline{x} = -10$ (*απορρίπτεται αφού όλες οι τιμές είναι θετικές*)

Β2.

Για $\overline{x} = 10$, έχουμε

$$\frac{11+7+\kappa+13+11+10}{6} = 10 \Leftrightarrow 52+\kappa = 60 \Leftrightarrow \boxed{\kappa = 8}$$

Β3.

Για $\kappa = 8$, οι τιμές σε αύξουσα σειρά είναι : $7,8,10,11,11,13$

Άρα Εύρος $R = 13-7 = 6$

Η διάμεσος ισούται με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων καθώς το πλήθος τους είναι άρτιος αριθμός.

Άρα $\delta = \frac{10+11}{2} = 10,5$

Β4.

Έστω $y_i = x_i - 2$ οι νέες τιμές του δείγματος.

Από γνωστή εφαρμογή του βιβλίου, ισχύει :

$\overline{y} = \overline{x} - 2$ δηλαδή $\overline{y} = 10-2 \Rightarrow \boxed{\overline{y} = 8}$

και $s_y = s_x$, δηλαδή $\boxed{s_y = 2}$

Τότε ο συντελεστής μεταβολής του νέου δείγματος θα είναι $CV_y = \frac{s_y}{\overline{y}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$

Άρα το δείγμα των νέων τιμών δεν είναι ομοιογενές, αφού $CV_y > 10\%$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$f(x)=\sqrt{x^2-2x+10},\quad x\in\mathbb{R}$

Τότε

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2-2x+10}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x^2-2x+10}}\cdot\left(x^2-2x+10\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x^2-2x+10}}\cdot(2x-2)=$$

$$=\frac{\cancel{2}(x-1)}{\cancel{2}\sqrt{x^2-2x+10}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}$$

Άρα $\boxed{f'(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}}$

Γ2.

Για τη μονοτονία της f έχουμε : $f'(x)=0\Rightarrow\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1$

Το πρόσημο της f' εξαρτάται μόνο από τον αριθμητή αφού ο παρονομαστής είναι θετικός για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	Ο.Ε.	↗

Η f είναι γνησίως φθίνουσα για $x\in(-\infty,1]$ και γνησίως αύξουσα για $x\in[1,+\infty)$

Εμφανίζει ολικό ελάχιστο για $x=1$ το $f(1)=\sqrt{1^2-2\cdot1+10}=\sqrt{9}=3$.

Άρα $f(x)\geq 3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ3.

Για $x=5$ έχουμε $f(5)=\sqrt{5^2-2\cdot5+10}=\sqrt{25}=5$

Άρα ζητούμε εξίσωση ευθείας $(\varepsilon): y=\alpha x+\beta$, η οποία εφάπτεται στην Cf στο $M(5,5)$

Για την ευθεία θα ισχύει : $\alpha=f'(5)=\frac{5-1}{\sqrt{5^2-2\cdot5+10}}=\boxed{\frac{4}{5}}$

Οπότε αντικαθιστώντας το $\alpha=\frac{4}{5}$, έχουμε $(\varepsilon): y=\frac{4}{5}x+\beta$ και αφού διέρχεται από το $\mathrm{M}(5,5)$ θα ισχύει $5=\frac{4}{\cancel{5}}\cdot\cancel{5}+\beta \Rightarrow \boxed{\beta=1}$

Άρα η ευθεία που εφάπτεται στην Cf στο $\mathrm{M}(5,5)$ είναι $\boxed{(\varepsilon): y=\frac{4}{5}x+1}$

Γ4.

Η ευθεία $(\varepsilon): y=\frac{4}{5}x+1$ τέμνει τον άξονα $x'x$ για $y=0$, οπότε $0=\frac{4}{5}x+1 \Leftrightarrow \frac{4}{5}x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{-5}{4}$

Άρα $\mathrm{A}\left(\frac{-5}{4},0\right)$

Η (ε) τέμνει τον άξονα $y'y$ για $x=0$, οπότε $y=\frac{4}{5}\cdot 0+1 \Leftrightarrow y=1$

Άρα $\mathrm{B}(0,1)$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

$f(x)=x^3-3x^2+\lambda x,\ \lambda\in R$

Δ1.

Για $\lambda=3$ η f γράφεται $f(x)=x^3-3x^2+3x$

Άρα $f'(x)=\left(x^3-3x^2+3x\right)'=3x^2-6x+3$

$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-6x+3=0$

$\Rightarrow 3\left(x^2-2x+1\right)=0$

$\Rightarrow x^2-2x+1=0$

$\Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$ διπλή ρίζα

Οπότε

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗		↗

Η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

Άρα $\frac{3}{8}<\frac{5}{6} \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{8}\right)<f\left(\frac{5}{6}\right)$

Δ2.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(x-1)\cdot x}\ \underline{\underline{(0/0)}}\ \lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)}{(\sqrt{x}-1)\cdot x}$$

$$\underline{\underline{(0/0)}}\ \lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\underline{\underline{(0/0)}}\ \lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x\left(\cancel{\sqrt{x}}^2-1^2\right)}\underline{\underline{(0/0)}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}{x\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to 1}\frac{3(\sqrt{x}+1)}{x}=\frac{3\cdot(\sqrt{1}+1)}{1}=6$$

Δ3.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της Cf σε ένα σημείο $(x_0, f(x_0))$ ισούται με $f'(x_0)$

Γίνεται ελάχιστος εάν $f''(x_0)=0$

$f''(x)=(3x^2-6x+3)'=6x-6$

Άρα $f''(x)=0 \Rightarrow 6x-6=0 \Rightarrow x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	↘		↗

Ο.Ε.

Πράγματι για $x=1$ η f' εμφανίζει ολικό ελάχιστο το $f'(1)=3\cdot(1-1)^2=0$, οπότε το σημείο της Cf στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης έχει τετμημένη $x_0=1$ και τεταγμένη $f(1)=1^3-3\cdot 1^2+3=1$, δηλαδή είναι το σημείο $(1,1)$

Δ4.

$f(x)=x^3-3x^2+\lambda x$

$f'(x)=3x^2-6x+\lambda$

Για να μην εμφανίζει ακρότατα η f πρέπει η f' να μην μηδενίζεται ή να διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν της ρίζας της

$\Delta=(-6)^2-4\cdot 3\cdot \lambda=36-12\lambda$

Πρέπει $\Delta \le 0$, δηλαδή

$$36 - 12\lambda \le 0$$

$$12\lambda \ge 36$$

$$\boxed{\lambda \ge 3}$$

Άρα η μικρότερη τιμή του λ για την οποία η f δεν παρουσιάζει ακρότατα είναι $\boxed{\lambda = 3}$