ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΕΠΑΛ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1) **α.** Σχολ. Βιβλίο «Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής» – σελ. 65
β. Σχολ. Βιβλίο «Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής» – σελ. 65
γ. Σχολ. Βιβλίο «Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής» – σελ. 65

Α2) Σχολ. Βιβλίο «Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής» – σελ. 22

Α3) **α) Σ   β) Λ   γ) Λ   δ) Σ   ε) Λ**

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Επειδή το πλήθος των δεδομένων αριθμών είναι περιττό, η διάμεσος ισούται με έναν από αυτούς.
Άρα $4\alpha - 1 = 15$

$$\boxed{\alpha = 4}$$

Για $\alpha = 4$ οι αριθμοί σε αύξουσα σειρά είναι 12, 14, 15, 16, 18.

Β2.

Η διακύμανση θα είναι:

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - \bar{x})^2$$

$$s^2 = \frac{1}{5}\cdot\sum_{i=1}^{5}(t_i - \bar{x})^2 \text{ , όπου } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} t_i}{5} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{12+14+15+16+18}{5} \Leftrightarrow \boxed{\bar{x} = 15}$$

Άρα $s^2 = \frac{1}{5}\left[(12-15)^2 + (14-15)^2 + (15-15)^2 + (16-15)^2 + (18-15)^2\right] \Leftrightarrow \boxed{s^2 = 4}$

Β3.

Η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{s^2}$

Άρα $\boxed{s = 2}$. Ο συντελεστής μεταβολής CV των αριθμών δίνεται από τον τύπο $CV = \frac{s}{\bar{x}}$.

Άρα $CV = \frac{2}{15} \simeq 0{,}13$ ή 13%

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές αφού $CV > 10\%$

Β4.

Έστω y_i , $i = 1, 2, ..., \kappa$ οι αριθμοί που θα προκύψουν αν ο καθένας από τους αρχικούς πολλαπλασιαστεί με το -2 και στη συνέχεια αυξηθεί κατά 5. Τότε θα έχουμε

$\boxed{y_i = -2x_i + 5}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$

Γνωρίζουμε ότι αν $\overline{x}$ η μέση τιμή των $x_1, x_2, ..., x_5$ τότε η μέση τιμή των $y_1, y_2, ..., y_5$ θα είναι $\overline{y} = -2\overline{x} + 5$. Άρα $\overline{y} = -2 \cdot 15 + 5 \Leftrightarrow \boxed{\overline{y} = -25}$

Η νέα τυπική απόκλιση θα είναι $s_y = |c| \cdot s_x$, όπου c ο αριθμός -2 με τον οποίο πολλαπλασιάσαμε κάθε αρχικό αριθμό.

Τότε $s_y = |-2| \cdot s_x = 2 \cdot 2 = 4$

Ο νέος συντελεστής μεταβολής είναι $CV_y = \frac{s_y}{|\overline{y}|} = \frac{4}{|-25|} = 0{,}16$ ή 16%

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Πρέπει $f'(1) = 0$

$f'(x) = 6x^2 - 6\kappa x$

$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot 1^2 - 6 \cdot \kappa \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow 6\kappa = 6 \Leftrightarrow \boxed{\kappa = 1}$

Γ2.

Για $\kappa = 1$ έχουμε : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

$f''(x) = 12x - 6$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x - 6 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$
		Ο.Ε.	

Η f' είναι γνησίως φθίνουσα για $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα για $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ (δηλαδή η $f'(x)$) γίνεται ελάχιστος για $x = \frac{1}{2}$

Γ3.

Έχουμε $f'(x) = 6x^2 - 6x$, $x \in R$

Η εφαπτομένη ευθεία στην γραφική παράσταση της $f'(x)$ στο $(-1, f'(1))$ θα είναι της μορφής $y = \alpha x + \beta$ με $\alpha = f''(-1)$ και θα διέρχεται από το σημείο $(-1, f'(-1))$ δηλαδή από το $(-1, 12)$

$f''(x) = 12x - 6$. Άρα $f''(-1) = -18$. Με αντικατάσταση στον τύπο της ευθείας έχουμε :

$12 = -18 \cdot (-1) + \beta \Leftrightarrow \beta = -6$

Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι η $\boxed{(\varepsilon): y=-18x-6}$

ΘΕΜΑ Δ

$f(x)=\sqrt{x^2+4}+2018,\ x\in R$

Δ1.

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+4}\right)'+(2018)'$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+4}}\cdot\left(x^2+4\right)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+4}}\cdot\cancel{2}x \Leftrightarrow \boxed{f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}}$$

Δ2.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}=0\Leftrightarrow x=0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

Ο.Ε.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα για $x\in(-\infty,\ 0]$ και γνησίως αύξουσα για $x\in[0,\ +\infty)$

Εμφανίζει ολικό ελάχιστο για $x=0$ το $f(0)=\sqrt{0^2+4}+2018\Leftrightarrow f(0)=2020$

Δ3.

$$\lim_{x\to0}\frac{(x^2+4)\cdot f'(x)-2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(x^2+4)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}-2x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\sqrt{x^2+4}-2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)}{x^{\cancel{2}}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2-2^2}{x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=0$$