ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ – ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεώρημα σελ. σχολ. βιβλ. 262
Α2. Θεωρία σελ. σχολ. βιβλ. 141
Α3. Θεωρία σελ. σχολ. βιβλ. 246-247
Α4. Λ, Σ, Λ, Σ, Σ

ΘΕΜΑ Β

$f(x)=\frac{x^2}{x^2+1},\ x\in R$

Β1..

Η f παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της R (διότι $x^2+1\geq 1>0$ άρα $x^2+1\neq 0$ για κάθε $x\in R$)

$$f'(x)=\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)'=\frac{\left(x^2\right)'\cdot\left(x^2+1\right)-\left(x^2+1\right)'\cdot x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x\cdot\left(x^2+1\right)-2x\cdot x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

(Η f πράξεις παραγωγισίμων άρα παραγωγίσιμη)

Έστω $f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}>0\Leftrightarrow 2x>0\Leftrightarrow x>0$

Έστω $f'(x)<0\Leftrightarrow\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}<0\Leftrightarrow 2x<0\Leftrightarrow x<0$

Έστω $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Leftrightarrow 2x=0\Leftrightarrow x=0$

Άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\ 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$f(0)$ = ολικό ελάχιστο = $\frac{0^2}{0^2+1}=\frac{0}{1}=0$

Β2.

Η f' παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγισίμων με $f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\right)'=$

$$\frac{(2x)'.\left(x^2+1\right)^2-2x\left[\left(x^2+1\right)^2\right]'}{\left(\left(x^2+1\right)^2\right)^2}=\frac{2\left(x^2+1\right)^2-2x\cdot 2\left(x^2+1\right)\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^4}=$$

$$\frac{2\left(x^2+1\right)^2-4x\left(x^2+1\right)2x}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{\left(x^2+1\right)\cdot\left[2\left(x^2+1\right)-8x^2\right]}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+1\right)^3}=\frac{2x^2+2-8x^2}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{2-6x^2}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$$f''(x)=\frac{2-6x^2}{\left(x^2+1\right)^3}\quad \forall x\in R$$

Έστω $f''(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{2-6x^2}{\left(x^2+1\right)^3}>0 \Leftrightarrow 2-6x^2>0$ διότι $\left[\left(x^2+1\right)^3>0\right]$

$$-6x^2>-2 \Leftrightarrow x^2<\frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x^2}<\sqrt{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow |x|<\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Έστω $f''(x)<0 \Leftrightarrow$ … … $x>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ή $x<-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Έστω $f''(x)=0 \Leftrightarrow$ … … $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ή $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$									
			Σ.Κ.		Ο.Ε.		Σ.Κ.		

(Η f κοίλη στα $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$)

(Η f κυρτή στο $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$)

(Σημεία καμπής τα $A\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$, $B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$)

$$f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{1}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{4}\Rightarrow$$

Σημεία καμπής τα $A\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{4}\right)$, $B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{4}\right)$

Θέσαμε $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ διότι η f άρτια

Β3.

Οριζόντια ασύμπτωτη όταν $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1 \Rightarrow$$

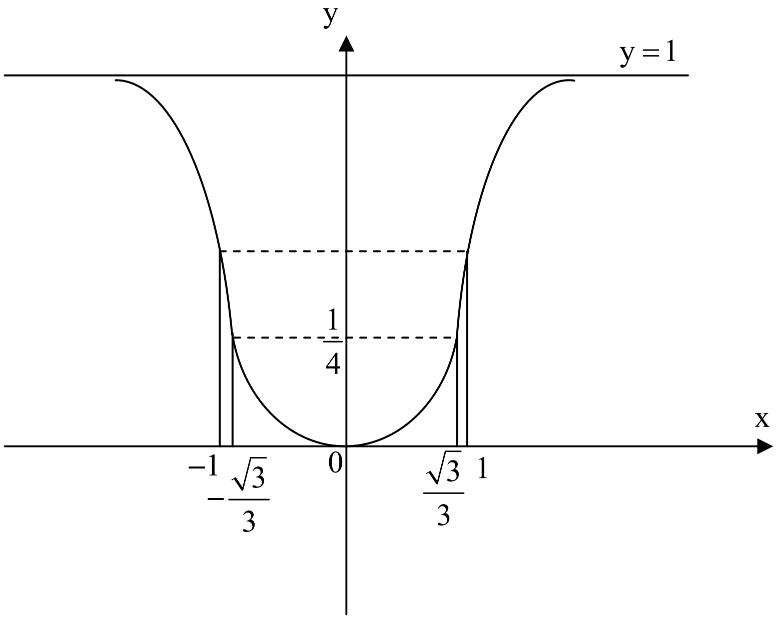
Η ευθεία (ε): $y=1$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, άρα δεν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Ομοίως, όταν $x\to-\infty$, οριζόντια ασύμπτωτη η ίδια ευθεία (ε): $y=1$, διότι

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} 1 = 1$$ (φυσικά δεν έχει πλάγια στο $-\infty$)

Κατακόρυφη ασύμπτωτη δεν υπάρχει διότι δεν υπάρχει $x_0 \in D_f = R$ στο οποίο $\lim\limits_{x\to x_0}$ ή $\lim\limits_{x\to x_0^+}$ ή $\lim\limits_{x\to x_0^-}$ να ισούται με $+\infty$ ή $-\infty$ δηλαδή δεν υπάρχει σημείο ασυνέχειας ή σημείο x_0 που είναι άκρο ανοιχτού υποδιαστήματος του R (το οποίο x_0 να ανήκει στο R)

Β4.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$, θέτω $x^2 = u$, τότε $e^u - u - 1 = 0$.

Έστω $g(u) = e^u - u - 1$, $g'(u) = e^u - 1$

$g'(u) = 0 \Leftrightarrow e^u - 1 = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Για $u<0 \Rightarrow e^u < e^0 \Leftrightarrow e^u < 1 \Leftrightarrow e^u - 1 < 0 \Leftrightarrow g'(u) < 0$

Για $u>0 \Rightarrow e^u > e^0 \Leftrightarrow e^u > 1 \Leftrightarrow e^u - 1 > 0 \Leftrightarrow g'(u) > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$
g	↘		↗
		Ο.Ε.	

Για $u=0$ η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $g(0)=e^0-0-1=0$

Άρα $g(u)\geq 0\ \ \forall u\in R$

Η συνάρτηση g είναι θετική για κάθε $u\in R$ και μηδενίζεται μόνο για $u=0$. Άρα η ρίζα $u=0$ μοναδική λύση της g.

Γ2.

Οι f συνεχείς συναρτήσεις, $f:R\to R$

$f(x)^2=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2=\left(g(x)\right)^2$ για κάθε $x\in R$

$\sqrt{f(x)^2}=\sqrt{\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2}=\sqrt{\left(g(x)\right)^2}$ για κάθε $x\in R$

$\left|f(x)\right|=\left|e^{x^2}-x^2-1\right|$ για κάθε $x\in R$

i) αν $f(x)\geq 0\Rightarrow f(x)=\left|e^{x^2}-x^2-1\right|\ \forall x\in R$

$\Rightarrow f(x)=e^{x^2}-x^2-1$ για κάθε $x>0$ και επειδή είναι συνεχής για $x\geq 0$

$\Rightarrow f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\geq 0\quad (1)$

$f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)>0$, για κάθε $x<0\quad (2)$

$(1),(2)\quad f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1 &, & x\geq 0\\ -e^{x^2}+x^2+1 &, & x<0\end{cases}$

ii) αν $f(x)\leq 0\Rightarrow -f(x)=\left|e^{x^2}-x^2-1\right|\ \forall x\in R$

$\Rightarrow f(x)=-\left|e^{x^2}-x^2-1\right|$ για κάθε $x\in R$

$\Rightarrow f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$, για $x>0$ και λόγω συνέχειας

$\Rightarrow f(x)=-e^{x^2}+x^2+1$ για $x\geq 0\quad (3)$

$f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, για $x<0$ και λόγω συνέχειας

$\Rightarrow f(x)=e^{x^2}-x^2-1$ για κάθε $x\leq 0\,(4)$

$(3),(4)\quad f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1 &, & x<0\\ -e^{x^2}+x^2+1 &, & x\geq 0\end{cases}$

Επίσης $f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in R$ και $f(x)=-(e^{x^2}-x^2-1),\ x\in R$.

Οι τέσσερις αυτές συναρτήσεις επαληθεύουν τα δεδομένα άρα είναι δεκτές.

Γ3.

$f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in R$

$f'(x)=2xe^{x^2}-2x$

$f''(x)=2e^{x^2}+2x\cdot e^{x^2}\cdot 2x-2=2e^{x^2}+4x^2e^{x}-2$

$f'''(\ \ )=2e^{x^2}\cdot 2x+4\left(2xe^{x^2}+x^2e^{x}\cdot 2x\right)=4xe^{x^2}+8xe^{x^2}+8x^3e^{x^2}=12xe^{x^2}+8x^3e^{x^2}=$

$=4xe^{x^2}\left(3+2x^2\right)$

Αλλά $e^{x^2} > 0$, $2x^2 + 3 > 0$ για κάθε $x \in R$

Άρα για $x > 0 \Rightarrow f'''(x) > 0 \Rightarrow f'' \nearrow$

για $x < 0 \Rightarrow f'''(x) < 0 \Rightarrow f'' \searrow$

Άρα για $x > 0 \overset{f'' \nearrow}{\Rightarrow} f'''(x) > f''(0)$ όπου $f''(0) = 0$

για $x < 0 \overset{f'' \searrow}{\Rightarrow} f''(x) > f''(0)$

Άρα $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in R$ και η f κυρτή

Γ4.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi'(x) = f(x+3) - f(x)$

$\Phi'(x) = f'(x+3)(x+3)' - f'(x) = f'(x+3) - f'(x) > 0$ διότι

$x + 3 > x \overset{f' \nearrow}{\Rightarrow} f'(x+3) > f'(x) \Rightarrow f'(x+3) - f'(x) > 0$, άρα $\Phi'(x) > 0 \Rightarrow \Phi \nearrow$

Αλλά $\Phi(|\eta\mu x|) = f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|)$

Άρα η δοθείσα γράφεται $\Phi(|\eta\mu x|) = \Phi(x) \overset{\Phi \nearrow}{\Rightarrow} |\eta\mu x| = x$ για $x \geq 0$, άρα $x = 0$

ΘΕΜΑ Δ

$D_f = R$

Δ1. f'' συνεχής

$$\int_0^\pi \left(f(x)\eta\mu x + f''(x) \cdot \eta\mu x\right) dx = \pi$$

$$\int_0^\pi \left(f(x)\eta\mu x + \left(f'(x)\right)' \cdot \eta\mu x\right) dx = \pi$$

$$\underbrace{\int_0^\pi \left(f(x)\eta\mu x\right) dx}_{A} + \int_0^\pi \left(\left(f'(x)\right)' \cdot \eta\mu x\right) dx = \pi$$

$$A + \left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x\right) dx = \pi$$

$$A + \left(f'(\pi) \cdot \eta\mu\pi - f'(0) \cdot \eta\mu 0\right) - \int_0^\pi \left(f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x\right) dx = \pi$$

$$A - 0 - \int_0^\pi \left(f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x\right) dx = \pi$$

$$A - \left[f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x\right]_0^\pi + \int_0^\pi \left(f(x) \cdot \left(\sigma\upsilon\nu x\right)'\right) dx = \pi$$

$$A - \left(f(\pi) \cdot \sigma\upsilon\nu\pi - f(0) \cdot \sigma\upsilon\nu 0\right) + \int_0^\pi \left(f(x) \cdot (-\eta\mu x)\right) dx = \pi$$

$$A - \left(f(\pi) \cdot (-1) - f(0) \cdot 1\right) - A = \pi \Leftrightarrow$$

$$-\left(-f(\pi) - f(0)\right) = \pi \Leftrightarrow f(\pi) - f(0) = \pi \quad (1)$$

Έστω $\dfrac{f(x)}{\eta\mu x} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = \eta\mu x \cdot g(x)$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}\left(\eta\mu x \cdot g(x)\right) = 0 \cdot g(0) = 0 \cdot 1 = 0 \overset{f \text{ συνεχής}}{\Rightarrow} f(0) = 0 \quad (2)$$

$(1),(2) \rightarrow f(\pi) - 0 = \pi \Leftrightarrow f(\pi) = \pi$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=1\cdot 1=1$$

Δ2.

i) Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στη θέση $x=x_0$, τότε πρέπει $f'(x_0)=0$

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της $e^{f(x)}+x=f(f(x))+e^x$

$e^{f(x)}\cdot f'(x)+1=f'(f(x))\cdot f'(x)+e^x$ για $x=0$

για $x=x_0\Rightarrow e^{f(x_0)}\cdot f'(x_0)+1=f'(f(x_0))\cdot f'(x_0)+e^{x_0}\overset{f'(x_0)=0}{\Rightarrow}$

$e^{f(x_0)}\cdot 0+1=f'(f(x_0))\cdot 0+e^{x_0}\Leftrightarrow e^{x_0}=1\Leftrightarrow x_0=0$

Άρα $f'(0)=0$, άτοπο διότι $f'(0)=1$, άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο R

ii) Επειδή $f'(0)=1\neq 0$ άρα η f' δεν μηδενίζεται για καμία τιμή του x, επομένως η f' συνεχής και διατηρεί σταθερό πρόσημο. Αλλά $f'(0)=1>0$

Άρα $f'(x)>0$ $\forall x\in R$ τότε $f\nearrow$ $\forall x\in R$

Δ3.

$-1\le \eta\mu x\le 1$

$\underline{-1\le \sigma\upsilon\nu x\le 1}$

$-2\le \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\le 2$, όπου $f\nearrow$

Επίσης $f(\pi)=\pi$

Άρα $f(x)>0$, $\dfrac{-2}{f(x)}\le\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\le\dfrac{2}{f(x)}\Rightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{f(x)}\right)\le\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\le\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{f(x)}$$

Έστω ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell\in R$, τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{f(x)}-f(f(x))\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-x\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{f(x)}-f(f(x))\right]=e^{\ell}-f(\ell)=\kappa\in R$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{e^x}{x}-1\right)\right]=+\infty \text{ διότι } \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, άρα $\kappa=+\infty$, άτοπο

τότε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{2}{f(x)}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{f(x)}=0$

Από κριτήριο παρεμβολής, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0$

Δ4.

$\int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx$, θέτω $\ln x = y \Rightarrow x = e^y \Rightarrow dx = e^y dy$

Για τα νέα άκρα : για $x = 1 \Rightarrow \ln 1 = y \Leftrightarrow y = 0$

Για $x = e^\pi \Rightarrow \ln e^\pi = y \Leftrightarrow y = \pi$

Άρα $\int_0^\pi \frac{f(y)}{e^y} \cdot e^y dy = \int_0^\pi f(y) dy$

Αλλά για $0 \le y \le \pi \overset{f \nearrow}{\Rightarrow} f(0) \le f(y) \le f(\pi) \Leftrightarrow 0 \le f(y) \le \pi \Rightarrow$

$\int_0^\pi 0 dy < \int_0^\pi f(y) dy < \int_0^\pi \pi dy$

$0 < \int_0^\pi f(y) dy < \pi(\pi - 0)$

Άρα $0 < \int_0^\pi f(y) dy < \pi^2$

$0 < \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$

Οι παραπάνω απαντήσεις είναι ενδεικτικές