

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΠΑΛ Α΄ΟΜΑΔΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1) Σχολ. Βιβλίο «Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής» – σελ. 28

A2) Σχολ. Βιβλίο «Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής» – σελ. 87

A3) α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1.

Ισχύει $v_5 = v_1 = 5$ και $v = 20$, τότε από τον τύπο $f_i = \frac{v_i}{v}$ έχουμε

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{5}{20} = 0,25, \text{ άρα } f_1\% = 25$$

$$f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{4}{20} = 0,2, \text{ άρα } f_2\% = 20$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} \Leftrightarrow v_3 = v \cdot f_3 = 20 \cdot 0,1 = 2 \text{ διότι το } f_3\% = 10\%, \text{ άρα } f_3 = 0,1, \text{ άρα } v_3 = 2$$

$$\text{Ισχύει ότι } v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = v \Leftrightarrow 5 + 4 + 2 + v_4 + 5 = 20 \Leftrightarrow v_4 = 20 - 16 = 4$$

$$f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{4}{20} = 0,2, \text{ άρα } f_4\% = 20$$

$$f_5\% = f_1\% = 25$$

Αριθμός πιστωτικών καρτών x_i	Αριθμός υπαλλήλων v_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	$x_i \cdot v_i$
0	5	5	25	0
1	4	9	20	4
2	2	11	10	4
3	4	15	20	12
4	5	20	25	20
ΣΥΝΟΛΑ	20		100	40

B2.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^v x_i v_i}{v} = \frac{40}{20} = 2$$

B3.

Οι υπάλληλοι που έχουν το πολύ τρεις κάρτες αντιστοιχούν στις συχνότητες v_1, v_2, v_3, v_4 άρα $N_4 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 5 + 4 + 2 + 4 = 15$ υπάλληλοι

B4.

Οι υπάλληλοι που έχουν τουλάχιστον δύο κάρτες αντιστοιχούν στις συχνότητες v_3, v_4, v_5 άρα $v_3 + v_4 + v_5 = 2 + 4 + 5 = 11$ υπάλληλοι

$$\text{Σε ποσοστό } \frac{11}{20} = \frac{55}{100} = 55\%$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}, \text{ τότε } f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' + \left(\frac{1}{2}\right)' = \frac{(x)'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} + 0 =$$

$$= \frac{x^2+1 - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

Γ2.

$$f'(-1) = \frac{1-(-1)^2}{[(-1)^2+1]^2} = \frac{1-1}{2^2} = 0$$

$$f'(1) = \frac{1-1^2}{(1^2+1)^2} = \frac{1-1}{2^2} = 0$$

Γ3.

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}, \text{ τότε } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
f'(x)	-	0	+	0	-
f(x)	↘		↗		↘

T.E. T.M.

για $x \in (-\infty, -1]$ η f γνησίως φθίνουσα

για $x \in [-1, 1]$ η f γνησίως αύξουσα

για $x \in [1, +\infty)$ η f γνησίως φθίνουσα

για $x = -1$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2 + 1} + \frac{1}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

για $x = 1$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(1) = \frac{1}{1^2 + 1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Γ4.

Επειδή τα 2015, 2016 είναι μεγαλύτερα της μονάδας όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα, θα ισχύει $2015 < 2016 \Rightarrow f(2015) > f(2016)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\cancel{(x-4)}(x-2)}{\cancel{(x-4)}} = \lim_{x \rightarrow 4} (x-2) = 2$$

Δ2.

για $\alpha = 2$ τότε $f(x) = x^2 + 2x - 3$

οπότε $f'(x) = 2x + 2$

Δ3.

Η γενική μορφή εξίσωσης εφαπτομένης στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (1)$$

για $x_0 = -2$, $f(x_0) = f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) - 3 = \cancel{4} - \cancel{4} - 3 = -3$

και $f'(-2) = 2(-2) + 2 = -4 + 2 = -2$

Άρα (1) $\Rightarrow y - f(-2) = f'(-2)(x + 2)$ ή

$$y - (-3) = -2(x + 2) \quad \text{ή}$$

$$y + 3 = -2x - 4 \quad \text{ή}$$

$$y = -2x - 7$$

Δ4.

$\varepsilon: y = -2x - 7$ με $\bar{x} = 2$, τότε ισχύει $y_i = -2x_i - 7$, $i = 1, 2, \dots, 5$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{5} = \frac{(-2x_1 - 7) + (-2x_2 - 7) + (-2x_3 - 7) + (-2x_4 - 7) + (-2x_5 - 7)}{5} =$$

$$= \frac{-2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 + 5 \cdot (-7)}{5} = \frac{-2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) - 35}{5} =$$

$$= -2 \cdot \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} \right) - \frac{35}{5} = -2\bar{x} - 7 = -2 \cdot 2 - 7 = -4 - 7 = -11$$

Άρα $\bar{y} = -11$