ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών σελ. σχολ. βιβλ. 194

Α2. Θεωρία σελ. σχολ. βιβλ. 188

Α3. Θεωρία σελ. σχολ. Βιβλ. 259

Α4. Λ, Σ, Λ, Σ, Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1..

$$|z-4|=2|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2=(2|z-1|)^2 \Leftrightarrow (z-4)(\bar{z}-4)=4(z-1)(\bar{z}-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z}-4z-4\bar{z}+16=4z\bar{z}-4z-4\bar{z}+4 \Leftrightarrow 3z\bar{z}=12 \Leftrightarrow z\bar{z}=4 \Leftrightarrow |z|^2=4 \Leftrightarrow |z|=2$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z είναι κύκλος κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho=2$ με καρτεσιανή εξίσωση $x^2+y^2=4$

Β2.

α) $w=\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}$, από Β1 ισχύει $|z|^2=4 \Leftrightarrow z\bar{z}=4 \Leftrightarrow \bar{z}=\frac{4}{z}$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\bar{w}=w$

$$\bar{w}=\overline{\left(\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}\right)}=\frac{2\bar{z_1}}{\bar{z_2}}+\frac{2\bar{z_2}}{\bar{z_1}}=\frac{2\frac{4}{z_1}}{\frac{4}{z_2}}+\frac{2\frac{4}{z_2}}{\frac{4}{z_1}}=\frac{8z_2}{4z_1}+\frac{8z_1}{4z_2}=\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}=w$$

β) Αρκεί να δείξουμε ότι $|w|\le 4$

$$|w|=\left|\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}\right|\le\left|\frac{2z_1}{z_2}\right|+\left|\frac{2z_2}{z_1}\right|=2\left|\frac{z_1}{z_2}\right|+2\left|\frac{z_2}{z_1}\right|=2\frac{|z_1|}{|z_2|}+2\frac{|z_2|}{|z_1|}=2\frac{4}{4}+2\frac{4}{4}=4$$

Διότι τα z_1, z_2 επειδή ανήκουν στον κύκλο $x^2+y^2=4$

Άρα $|z_1|=4$ και $|z_2|=4$. Τότε $|w|\le 4 \Leftrightarrow -4\le w\le 4$

Β3.

$W=\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}$ και $W=-4$ τότε

$$\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}=-4 \Leftrightarrow \frac{2z_1^2+2z_2^2}{z_1z_2}=-4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(z_1^2+z_2^2)=-4z_1+z_2 \Leftrightarrow z_1^2+z_2^2+2z_1z_2=0 \Leftrightarrow$$

$$(z_1+z_2)^2=0 \Leftrightarrow \boxed{z_1+z_2=0}.$$

Έστω $(AB)=|z_2-z_1|=|z_2-(-z_2)|=|2z_2|=2|z_2|$

$(A\Gamma)=|z_3-z_1|=|2i\,z_2-z_1|=|z_1|\ |2i-1|=\sqrt{5}|z_1|$

$(B\Gamma)=|z_3-z_2|=|2i\,z_1-(-z_1)|=|2iz_1+z_1|=|z_1|\ |2i-1|=\sqrt{5}|z_1|$

Επειδή $(A\Gamma)=(B\Gamma)=\sqrt{5}|z_1|$ το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με κορυφή το Γ.

ΘΕΜΑ Γ

$f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1},\ x\in\Re$

Γ1.

$D_f=\Re,\ f'(x)=\dfrac{(e^x)'(x^2+1)-e^x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}\ge 0$ (το « = » ισχύει για $x=1$).

Άρα η f γνησίως αύξουσα στο R.

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$ διότι

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+1}\cdot e^x=0$$

$$\left(\lim_{x\to-\infty}e^x=0,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+1}=0\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$$

Γ2.

$$f\left(e^{3-x}\cdot(x^2+1)\right)=\frac{e^2}{5}\Leftrightarrow f\left(e^{3-x}\cdot(x^2+1)\right)=f(2)\Leftrightarrow$$

$$\overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow}e^{3-x}\cdot(x^2+1)=2\Leftrightarrow\frac{e^3}{e^x}\cdot(x^2+1)=2\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{e^x}=\frac{2}{e^3}\Leftrightarrow f(x)=\frac{e^3}{2}$$

Παρατηρώ ότι το $\dfrac{e^3}{2}\in f(A)=(0,+\infty)$

Άρα υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_0\in\Re$ και επειδή η f γνησίως αύξουσα στο $\Re$ η ρίζα είναι μοναδική.

Γ3.

<u>$1^{ος}$ τρόπος</u>

<u>Για $x>0$</u>

$t\le 4x\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(t)\le f(4x)$ (το « = » ισχύει παντού)

$$\Rightarrow\int_{2x}^{4x}f(t)dt<\int_{2x}^{4x}f(4x)dt\Leftrightarrow\int_{2x}^{4x}f(t)dt<f(4x)(4x-2x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_{2x}^{4x}f(t)dt<2x\cdot f(4x).$$

<u>$2^{ος}$ τρόπος</u>

Θεωρώ $F(x)=\int_{\alpha}^{x}f(t)dx,\quad \alpha\in(0,+\infty),\ (F'(x)=f(x))$

Η ανίσωση γράφεται $\int_{2x}^{\alpha}f(t)dx+\int_{\alpha}^{4x}f(t)dx<2xf(4x)\Leftrightarrow\int_{\alpha}^{4x}f(t)dx-\int_{\alpha}^{2x}f(t)dx<2xf(4x)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{F(4x)-F(2x)}{2x}<f(4x)\quad(1)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής για τη F στο $[2x,4x]$

- F συνεχής στο $[2x, 4x]$
- F παραγωγίσιμη στο $(2x, 4x)$

Υπάρχει $\xi \in (2x,\ 4x) : F'(\xi) = \dfrac{F(4x) - F(2x)}{2x}$ (2)

Από την (1),(2) $\rightarrow F'(\xi) < f(4x) \Leftrightarrow f(\xi) < f(4x) \overset{f\uparrow}{\rightarrow} \xi < 4x$ ισχύει.

Γ4.

Συνέχεια στο $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{4f(4x) - 2f(2x)}{1} = 2f(0) = 2\cdot 1 = 2$$

$g(0) = 2$, άρα $\lim_{x\to 0^+} g(x) = g(0)$, άρα η g συνεχής στο $x_0 = 2$

Για κάθε $x > 0$

$$g'(x) = \frac{\left(\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt\right)' \cdot x - \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\left(4f(4x) - 2f(2x)\right)\cdot x - \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt}{x^2} =$$

$$= \frac{4x\cdot f(4x) - 2x\cdot f(2x) - \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt}{x^2} = \frac{2xf(4x) + 2xf(4x) - 2xf(2x) - \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt}{x^2} =$$

$$= \frac{2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt + 2x\left(f(4x) - f(2x)\right)}{x^2}$$

- $2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt > 0$ (ερώτημα Γ3)
- $2x > 0$
- $f(4x) > f(2x)$ διότι f γνησίως αύξουσα

Άρα $2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt + 2x\left(f(4x) - f(2x)\right) > 0$,

Οπότε $g'(x) > 0$ άρα g γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x)\left(e^{f(x)} + e^{-f(x)}\right) = 2$, $f(0) = 0$

$$f'(x)\left(e^{f(x)} + e^{-f(x)}\right) = 2 \Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)} + f'(x)e^{-f(x)} = 2 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)' - \left(e^{-f(x)}\right)' = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{(fx)} - e^{-f(x)} = 2x + c$$

Για $x = 0$ → $e^{f(0)} - e^{-f(0)} = c \Leftrightarrow e^0 - e^0 = c \Leftrightarrow c = 0$ Άρα $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x$

Θέτω $g(x) = e^{f(x)} > 0$

$$\Leftrightarrow g(x) - \frac{1}{g(x)} = 2x \Leftrightarrow g^2(x) - 2xg(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g^2(x) - 2xg(x) + x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow \left(g(x) - x\right)^2 = x^2 + 1 > 0$$

$$\left.\begin{array}{r} g(x) - x \neq 0 \\ g(x) - x \text{ συνεχής} \\ g(0) - 0 = g(0) = e^{f(0)} = 1 > 0 \end{array}\right\} g(x) - x > 0$$

$$\Rightarrow g(x)-x=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow g(x)=x+\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow e^{f(x)}=x+\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

Δ2. α) $f'(x)=\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}\right)=$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{\cancel{x+\sqrt{x^2+1}}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{x^2+1}+x}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0 \quad (\text{f γν. αύξουσα στο R})$$

$$f''(x)=\frac{\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}\cdot\cancel{2}x}{x^2+1}=\frac{x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$$

$f''(x)=0 \to x=0$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	−
$f(x)$	∪	Σ.Κ.	∩

C_f στο $(-\infty,0]$ στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω, δηλαδή η C_f κυρτή

C_f στο $[0,+\infty)$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, δηλαδή η C_f κοίλη

Η f εμφανίζει Σημείο Καμπής στο $x=0$ με τιμή $f(0)=0$

β) Βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0,f(0))$

Για $x=0 \to \begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=1 \end{cases}$

Άρα (ε) : $y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y-0=1\cdot x \Leftrightarrow y=x$

Για κάθε $x\in[0,1]$: C_f κοίλη, άρα $f(x)\le x \Leftrightarrow f(x)-x\le 0$

$$E(\Omega)=-\int_0^1\left[f(x)-x\right]dx=-\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 xdx=-\int_0^1\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx+\int_0^1 xdx=$$

$$=-\left[x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]'+\int_0^1 x\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx+\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=-\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-0\right)+\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=$$

$$=-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}-1+\frac{1}{2}=\sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{1}{2}$$

Δ3.

f γνησίως αύξουσα άρα $x>0 \to f(x)>f(0) \Leftrightarrow f(x)>0$

$$\lim_{x\to0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\cdot\ln|f(x)|\right]=\lim_{x\to0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\cdot\ln f(x)\right]\overset{0(-\infty)}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{\frac{1}{\ln f(x)}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f^2(x)}{-\frac{f'(x)}{f(x)\cdot\ln^2 f(x)}}=-\lim_{x\to0}\left[e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot\frac{f(x)}{f'(x)}\cdot\left[f(x)\ln f(x)\right]^2\right]\quad(1)$$

- $\lim\limits_{x\to0}e^{\int_0^x f^2(t)dt}=e^0=1$
- $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{f(0)}{f'(0)}=\frac{0}{1}=0$
- $\lim\limits_{x\to0^+}\left(f(x)\cdot\ln f(x)\right)\overset{f(x)=u}{=}\lim\limits_{u\to0}\frac{\ln u}{\frac{1}{u}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{u\to0}\frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}}=\lim\limits_{u\to0}\left(-\frac{u^2}{u}\right)=-\lim\limits_{u\to0}u=0$

Άρα το όριο είναι $=1\cdot0\cdot0=0$

Δ4.

$$\frac{1-3\int_0^{x-2}f(t^2)dt}{x-3}+\frac{8-3\int_0^x f^2(t)dt}{x-2}=0\Leftrightarrow$$

$$(x-2)\cdot\left(1-3\int_0^{x-2}f(t^2)dt\right)+(x-3)\cdot\left(8-3\int_0^x f^2(t)dt\right)=0$$

Θεωρώ

$$\varphi(x)=(x-2)\left(1-3\int_0^{x-2}f(t^2)dt\right)+(x-3)\left(8-3\int_0^x f^2(t)dt\right)$$

- φ συνεχής στο [2,3] ως πράξεις συνεχών
- $\varphi(2)=-8+3\int_0^2 f^2(t)dt$
- $\varphi(3)=1-3\int_0^1 f(t^2)dt$

Ισχύει για κάθε $x\in(2,3)$ (C_f κοίλη)

$0<f(t)\le t\Rightarrow f^2(t)\le t^2$

$$\int_0^2 f^2(t)dt<\int_0^2 t^2dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2=\frac{8}{3}-0=\frac{8}{3}\Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_0^2 f^2(t)dt<\frac{8}{3}\Rightarrow3\int_0^2 f^2(t)dt<8\Rightarrow3\int_0^2 f^2(t)dt-8<0\Rightarrow\varphi(2)<0$$

$$f(t)\le t\Rightarrow f(t^2)\le t^2\Rightarrow\int_0^1 f(t^2)dt<\int_0^1 t^2dt\Rightarrow\int_0^1 f(t^2)dt<\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_0^1 f(t^2)dt<\frac{1}{3}\Rightarrow\int_0^1 f(t^2)dt-1<0\Rightarrow1-3\int_0^1 f(t^2)dt>0\Rightarrow\varphi(3)>0$$

Άρα για την Φ(x) πληρούνται οι προϋποθέσεις θεωρήματος Bolzano

Οι παραπάνω απαντήσεις είναι ενδεικτικές