

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Θεωρία σελ. σχολ. βιβλίου 31.

**A2.** Θεωρία σελ. σχολ. βιβλίου 22.

**A3.** Θεωρία σελ. σχολ. βιβλίου 87.

**A4.** α. Λ                      β. Σ                      γ. Λ                      δ. Λ                      ε. Σ.

### ΘΕΜΑ Β

#### B1.

$$\begin{aligned}
 (3x-1)(8x^2-6x+1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} 3x-1=0 \\ 8x^2-6x+1=0 \end{matrix} \quad \text{ή} \quad \Leftrightarrow \begin{matrix} x = \frac{1}{3} \text{ ή} \\ x = \frac{1}{2} \text{ ή} \\ x = \frac{1}{4} \end{matrix}
 \end{aligned}$$

Ισχύει  $A \cap B \subseteq A$  τότε  $P(A \cap B) \leq P(A)$

$A \subseteq A \cup B$  τότε  $P(A) \leq P(A \cup B)$

Άρα  $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$

Επομένως  $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ ,  $P(A) = \frac{1}{3}$ ,  $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$

#### B2.

$$\begin{aligned}
 P(A' - B') &= P(A') - P(A' \cap B') = 1 - P(A) - P[(A \cup B)'] = \\
 1 - P(A) - 1 + P(A \cup B) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

Ισχύει  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

Πραγματοποιείται το πολύ ένα, αντιστοιχεί στο  $(A \cap B)'$

$$\text{Άρα } P(\Delta) = P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

#### B3.

Πραγματοποιείται μόνο ένα, αντιστοιχεί στο  $(A - B) \cup (B - A)$  άρα:

$$\begin{aligned}
 P(E) &= P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A - B) + P(B - A) = \\
 &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{5}{12} - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

**B4.**

$9x^2 - 3x - 2 = 0$  με  $x_1 = \frac{2}{3}$  και  $x_2 = -\frac{1}{3}$  απορρίπτεται

$$\text{Άρα } P(\Gamma) = \frac{2}{3}$$

Έστω ότι τα ενδεχόμενα B, Γ είναι ασυμβίβαστα τότε

$$P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma) = \frac{5}{12} + \frac{2}{3} = \frac{13}{12} > 1$$

Αδύνατο διότι  $P(B \cup \Gamma) \leq 1$ . Άρα B, Γ δεν είναι ασυμβίβαστα.

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.**  $f_1\% = 10, \quad f_2\% = 30$

$$\alpha_3 = 360f_3 \Leftrightarrow 108 = 360f_3 \Leftrightarrow f_3 = 0,3. \text{ Άρα } f_3\% = 30$$

Ισχύει  $f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% + f_5\% = 100$

$$10 + f_2\% + 30 + f_4\% + 30 = 100 \Leftrightarrow$$

$$f_2\% + f_4\% = 30 \Leftrightarrow f_2 + f_4 = 0,3 \quad (1)$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^4 x_i f_i = 9f_1 + 11f_2 + 13f_3 + 15f_4 + 17f_5 = 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 \cdot 0,1 + 11f_2 + 13 \cdot 0,3 + 15f_4 + 17 \cdot 0,3 = 14 \Leftrightarrow 11f_2 + 15f_4 = 4,1 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} f_2 + f_4 = 0,3 & \Leftrightarrow \begin{cases} f_2 = 0,1 & f_2 = 10\% \\ f_4 = 0,2 & f_4 = 20\% \end{cases} \text{ ή } \end{aligned}$$

**Γ2.**  $S^2 = \sum_{i=1}^5 x_i f_i, \quad S^2 = 6,6, \quad S = \sqrt{S^2} = \sqrt{6,6} = 2,57$

Κλάσεις	$x_i$	$f_i\%$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 f$
[8,10)	9	10	-5	25	2,5
[10,12)	11	10	-3	9	0,9
[12,14)	13	30	-1	1	0,3
[14,16)	15	20	1	1	0,2
[16,18)	17	30	3	9	2,7
Σύνολο		100			6,6

$$CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{2,57}{14} \Leftrightarrow CV = 0,18 > 0,1$$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ3. Ισχύει  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i v_i + v_5 x_5}{v} = \frac{1780 + v_5 x_5}{v} = \frac{1780}{v} + \frac{v_5 x_5}{v} = \frac{1780}{v} + x_5 f_5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 14 = \frac{1780}{v} + 17 \cdot 0,3 \Leftrightarrow \frac{1780}{v} = 8,9 \Leftrightarrow v = 200$$

Γ4.  $\beta_i = \frac{1}{S_a} \alpha_i - \frac{1}{S_a} \bar{\alpha}$  τότε σύμφωνα με την εφαρμογή 3 σελ. 99 σχολ. βιβλίου ισχύει

$$\bar{\beta} = \frac{1}{S_a} \bar{\alpha} - \frac{1}{S_a} \bar{\alpha} = \frac{\bar{\alpha}}{S_a} - \frac{\bar{\alpha}}{S_a} = 0 \text{ και } S_\beta = \left| \frac{1}{S_a} \right| S_a = \frac{1}{S_a} S_a = 1 \text{ όπου } S_a > 0.$$

### ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

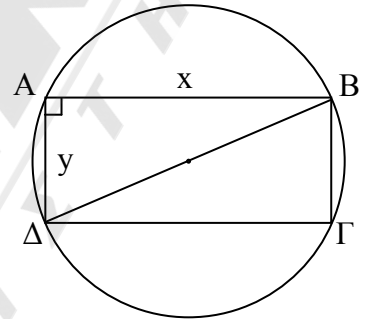
Επειδή  $\hat{A} = 1L$  τότε ΔB διαγώνιος. Άρα από πυθαγόρειο θεώρημα

$$x^2 + y^2 = (2R)^2 = 4 \cdot 25 = 100 \Leftrightarrow y^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{100 - x^2} \quad (1), \quad y > 0$$

$$E = AB \cdot A\Delta = x \cdot y \stackrel{(1)}{=} x \cdot \sqrt{100 - x^2} \text{ όπου } 0 < x < 10.$$

$$\text{Άρα } f(x) = x \cdot \sqrt{100 - x^2} \quad 0 < x < 10$$



Δ2.

$$f'(x) = \sqrt{100 - x^2} + x \frac{1}{2\sqrt{100 - x^2}} (100 - x^2)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \sqrt{100 - x^2} + x \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - x^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 5\sqrt{2}.$$

Αλλά  $x > 0$ , άρα  $x = 5\sqrt{2}$ .

	0	$5\sqrt{2}$	10
$f'$		+	-
$f$		$\nearrow$	$\searrow$

Για  $x = 5\sqrt{2}$  το εμβαδό του ορθογώνιου γίνεται μέγιστο τότε

$y^2 = 100 - x^2 = 100 - 50 = 50$  και  $y = 5\sqrt{2} = x$ . Άρα το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

Δ3. Επειδή  $f(1) = 1\sqrt{100-1} = \sqrt{99}$  τότε το όριο γίνεται

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{98x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{98} \cdot \frac{f(1+x) - f(1)}{x} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{98} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} = \frac{1}{98} f'(1) = \frac{1}{98} \frac{98}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{99}$$

$$\text{A4. Ισχύει } 0 \leq P(A) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq P(A)^2 \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 100 \geq 100 - P(A)^2 \geq 100 - 1 \Leftrightarrow 10 \geq \sqrt{100 - P(A)^2} \geq \sqrt{99} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10} \leq \frac{1}{\sqrt{100 - P(A)^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{99}} \Leftrightarrow \frac{1}{10} \leq \frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P(A)^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{99}}, \text{ διότι } 0 \leq P(A-B) \leq 1$$

$$\text{Άρα } 0 < \frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P(A)^2}} < 1 \text{ όμοια } 0 < \frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} < 1$$

Όπου η συνάρτηση  $f$  στο διάστημα  $(0,1)$  είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}}\right) \leq f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}}\right)$$

$$\frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} \leq \frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} \Leftrightarrow P(A-B) \sqrt{100 - P^2(A-B)} \leq P(A) \sqrt{100 - P^2(A)}$$

$f(P(A-B)) \leq f(P(A))$  όπου  $f$  γνησίως αύξουσα

$P(A-B) \leq P(A)$  το οποίο ισχύει διότι  $A-B \subseteq A \Rightarrow P(A-B) \leq P(A)$