

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελ. σχολ. βιβλ. 251

Α2. Θεωρία σελ. σχολ. βιβλ. 273

Α3. Θεωρία σελ. σχολ. Βιβλ. 150

 Α4. $\Lambda, \Sigma, \Sigma, \Sigma, \Lambda$
ΘΕΜΑ Β
Β1.

$$2|z^2| + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0 \quad (1)$$

$$\text{Αν } z = x + yi \text{ τότε } |z|^2 = x^2 + y^2 = z + \bar{z} = 2x$$

$$(1) \Rightarrow 2(x^2 + y^2) + 2xi - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2 + (x-1)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & y = 1 \\ x = 1 & y = -1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Άρα οι λύσεις της (1) είναι οι μιγαδικοί $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = 1 - i$

Β2.

$$\text{Το πηλίκο } \frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{-i(1+i)} = -\frac{1}{i} = i \text{ τότε}$$

$$W = 3 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{39} = 3(i)^{39} = 3i^{4 \cdot 9 + 3} = 3(i^4)^9 \cdot i^3 = 3 \cdot 1 \cdot (-i) = -3i$$

Β3.

$$|u + w| = |4z_1 - z_2 - i|$$

$$\text{Θέτω } w = -3i, z_1 = 1 + i, z_2 = 1 - i \text{ τότε } |u - 3i| = |4(1+i) - (1-i) - i|$$

$$|u - 3i| = |4 + 4i - 1 + i - i| = |u - 3i| = |3 + 4i| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |u - 3i| = \sqrt{3^2 + 4^2} \Leftrightarrow |u - 3i| = 5 \text{ θέτω όπου } u = \alpha + \beta i \text{ τότε}$$

$$|\alpha + \beta i - 3i| = 5 \Leftrightarrow |\alpha + (\beta - 3)i|^2 = 5^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + (\beta - 3)^2 = 25 \text{ (καρτεσιανή εξίσωση κύκλου).}$$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w κινούνται στο μιγαδικό επίπεδο σε κύκλο με κέντρο το $K(0, 3)$ και ακτίνα $\rho = 5$

ΘΕΜΑ Γ
Γ1.

$$h(x) = x - \ln(e^x + 1), \quad x \in \mathbb{R}$$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ως πράξη παραγωγισίμων.

Άρα $h'(x) = 1 - \frac{1}{e^x + 1} \cdot e^x = \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1} > 0$ (οπότε η γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R})

$$h''(x) = \left(\frac{1}{1+e^x} \right)' = -\frac{(1+e^x)'}{(1+e^x)^2} = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2} < 0$$

Άρα $h''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ οπότε η κοίλη στο \mathbb{R}

Γ2.

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \quad (1)$$

Παρατηρώ ότι $h(x) = \ln e^x - \ln(e^x + 1) = \ln \frac{e^x}{e^x + 1}$

$$\text{Άρα } h(1) = \ln \frac{e}{e+1}$$

Άρα λογαριθμίζω την (1)

$$\ln e^{h(2h'(x))} < \ln \frac{e}{e+1} \Rightarrow h(2h'(x)) < h(1) \xrightarrow[\text{αύξουσα}]{\text{h γνησίως}} 2h'(x) < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h'(x) < \frac{1}{2} \Rightarrow h'(x) < h'(0) \xrightarrow[\text{h' γνησίως φθίνουσα}]{h'' < 0} x > 0$$

Γ3.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(e^x + 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln e^x - \ln(e^x + 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x}{e^x + 1} \quad (1)$$

$$\text{Θέτω } u = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

Άρα $\xrightarrow{(1)} \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0$ οπότε η $y=0$ (Άξονας $x'x$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \ln(e^x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{\ln(e^x + 1)}{x} \right) \quad (1)$$

$$\text{Παρατηρώ ότι } \frac{\ln(e^x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x} \cdot \ln(e^x + 1) \right] = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\text{άρα το } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = 1 - 0 = 1 \text{ οπότε } \lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x}$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - \lambda - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\cancel{x} - \ln(e^x + 1) - \cancel{x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\ln(e^x + 1)) = 0$$

Άρα $y = x$ πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$

Γ4.

Πρόσημο της $\Phi(x)$

$$\phi(x) = 0 \rightarrow e^x (h(x) + \ln 2) = 0 \xrightarrow{e^x > 0}$$

$$\Rightarrow h(x) + \ln 2 = 0 \Rightarrow \ln e^x - \ln(e^x + 1) + \ln 2 = 0 \Leftrightarrow \ln(2e^x) - \ln(e^x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow 2e^x = e^x + 1 \Rightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow \boxed{x=0}$$

$$\phi(x) > 0, \forall x > 0$$

$$\text{Άρα } E(\Omega) = \int_0^1 \phi(x) dx = \int_0^1 e^x (h(x) + \ln 2) dx = \int_0^1 (e^x)' (h(x) + \ln 2) dx$$

$$= [e^x (h(x) + \ln 2)]_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot h'(x) dx = [e^x (h(x) + \ln 2)]_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot \frac{1}{e^x + 1} dx$$

$$= [e^x (h(x) + \ln 2)]_0^1 - (\ln(e^x + 1))_0^1 =$$

$$e^1 (h(1) + \ln 2) - [e^0 (h(0) + \ln 2)] - (\ln(e+1) - \ln 2)$$

$$= e(1 - \ln(e+1) + \ln 2) - (-\ln 2 + \ln 2) - (\ln(e+1) - \ln 2)$$

$$= e - e \ln(e+1) + e \ln 2 - \ln(e+1) + \ln 2$$

$$= (e+1) \ln \frac{2}{e+1} + e$$

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$\Delta 1. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1 = f(0)$$

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)' = \frac{(e^x - 1)' \cdot x - (e^x - 1) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{e^x \cdot x - e^x + 1}{x^2} \quad (1)$$

$$\text{Θεωρώ } h(x) = xe^x - e^x + 1$$

$$h'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x \Leftrightarrow h'(x) = 0, x = 0$$

Στο σημείο $x = 0$ η h δέχεται ολικό ελάχιστο το $h(0) = 0$

$$h(x) \geq h(0) \Rightarrow h(x) \geq 0$$

$$\text{Οπότε } f'(x) = \frac{h(x)}{x^2} \geq 0$$

Άρα η f γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}

Δ2. α) f γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{x} = 0$$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	\swarrow	\nearrow	

Ο.Ε.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty,$$

$$f(A) = (0, +\infty), f(x) > 0$$

$$\text{Εάν } \left. \begin{array}{l} 1 < 2f'(x) \\ f(x) > 0 \end{array} \right\} \int_1^{2f'(x)} f(u) du > 0 \quad \text{Άτοπο}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 > 2f'(x) \\ f(x) > 0 \end{array} \right\} \int_1^{2f'(x)} f(u) du < 0 \quad \text{Άτοπο}$$

$$\text{Άρα } f'(x) = \frac{1}{2}, f'(x) = f'(0) \xrightarrow[\text{f γν. αύξουσα}]{\text{f κυρτή}} \boxed{x=0}$$

$$\text{Αποδεικνύω ότι } f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x \cdot \left(\frac{0}{0}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x \cdot \left(\frac{0}{0}\right)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

β) Ισχύει $x'(t) = 2y'(t)$ (1) όπου $x'(t)$ και $y'(t)$ ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης και της τεταγμένης αντίστοιχα του σημείου $M(x(t), y(t))$ για $t \geq 0$.

Τότε από

$$y = f(x) \Leftrightarrow y(t) = f(x(t)) \Leftrightarrow y'(t) = f'(x(t)) \cdot x'(t) \xrightarrow{(1)} \frac{1}{2} x'(t) = f'(x(t)) \cdot x'(t) \Leftrightarrow$$

$$x'(t) \cdot \left(f'(x(t)) - \frac{1}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow^{x'(t) > 0} f'(x(t)) = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\text{Αλλά } f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} \text{ τότε } f'(x(t)) = \frac{x(t)e^{x(t)} - e^{x(t)} + 1}{x(t)^2}$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} \frac{1}{2} = \frac{x(t)e^{x(t)} - e^{x(t)} + 1}{x(t)^2} \Leftrightarrow x(t)^2 = 2x(t)e^{x(t)} - e^{x(t)} + 1$$

$$x(t)^2 - 2e^{x(t)}x(t) + e^{x(t)} - 1 = 0 \quad (3)$$

Μια προφανής ρίζα της (3) είναι η $x(t) = 0$. Αλλά $x(t)e^{x(t)} - e^{x(t)} + 1 > 0$

Άρα η (3) έχει μοναδική λύση την $x(t) = 0$ τότε $y(t) = f_{(x(t))} = 1$

Δ3.

$$g(x) = (xf(x) + 1 - e)^2 (x - 2)^2 = \left[x \cdot \frac{e^x - 1}{x} + 1 - e \right]^2 (x - 2)^2 =$$

$$= (e^x - x + x - e)^2 \cdot (x - 2)^2 = (e^x - e)^2 \cdot (x - 2)^2 =$$

$$= g'(x) = 2(e^x - e) \cdot (e^x - e)' \cdot (x - 2)^2 + (e^x - e)^2 \cdot 2(x - 2)$$

$$= 2(e^x - e) \cdot (e^x - 0) \cdot (x - 2)^2 + (e^x - e)^2 \cdot 2(x - 2) = 2(e^x - e) \cdot (x - 2) [e^x(x - 2) + (e^x - e)]$$

$$= 2(e^x - e) \cdot (x - 2) \cdot (e^x \cdot x - 2e^x + e^x - e) = 2(e^x - e) \cdot (x - 2) \cdot (e^x \cdot x - e^x - e)$$

$$e^x = e \Leftrightarrow x = 1$$

$$g'(x) = 0 \rightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$x \cdot e^x - e^x - e = 0$$

Θεωρώ $A(x) = e^x x - e^x - e$

Bolzano στο $[1, 2]$

A συνεχής στο $[1, 2]$

$$\left. \begin{aligned} A(1) &= -e < 0 \\ A(2) &= 2e^2 - e^2 - e = e^2 - e > 0 \end{aligned} \right\} (A(1)) \cdot (A(2)) < 0$$

Άρα υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$

$A'(x) = xe^x > 0$ Άρα $A(x)$ γνησίως αύξουσα

Άρα $x = x_0$ μοναδική ρίζα

x	$-\infty$	1	x_0	2	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	+
$g(x)$					
		T.E.	T.M.	T.E.	