

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')**  
**ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και
- $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ ,

τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 10**

**A2.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  (ολικό) μέγιστο, το  $f(x_0)$ ;

**Μονάδες 5**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  ισχύει  $z - \bar{z} = 2\text{Im}(z)$

(μονάδες 2)

**β)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

(μονάδες 2)

**γ)** Αν μια συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

(μονάδες 2)

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ'ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

δ) Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

(μονάδες 2)

ε) Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$ , τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

(μονάδες 2)

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η εξίσωση

$$2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

**B1.** Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

**Μονάδες 9**

**B2.** Αν  $z_1=1+i$  και  $z_2=1-i$  είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$w = 3 \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^{39}$$

είναι ίσος με  $-3i$

**Μονάδες 8**

**B3.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $u$  για τους οποίους ισχύει

$$|u + w| = |4z_1 - z_2 - i|$$

όπου  $w, z_1, z_2$  οι μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος B2.

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = (x-3)^2(x-1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**Γ1.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.

**Μονάδες 8**

**Γ2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  η οποία

α) είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση  $y = 4x + 3$

και

β) η τετμημένη του σημείου επαφής της με την γραφική παράσταση της  $f$  είναι ακέραιος αριθμός.

**Μονάδες 8**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = (x-1)f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $h$  με  $h(x) = \frac{\alpha x^2 - x + 2}{x+1}$ ,  $x \neq -1$  και  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Αν η ευθεία

με εξίσωση  $y = x - 2$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $h$  στο  $+\infty$ , τότε

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 1$

**Μονάδες 7**

**Δ2.** α) Να εξετάσετε αν η ευθεία με εξίσωση  $y = x - 2$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $h$  και στο  $-\infty$ .

β) Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $h$ .

**Μονάδες 9**

- Δ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $h(x) + \frac{(x+3)^4}{x} = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(-1, 0)$

**Μονάδες 9**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

- 1.** Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα Ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
- 2.** Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
- 3.** Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
- 4.** Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
- 5.** Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
- 6.** Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**