ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄) 2013

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)
Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;
Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho,\ \rho>0$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ^2, όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

γ) Ισχύει ότι: $|\eta\mu x| \le |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

ε) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(z-2)(\bar{z}-2) + |z-2| = 2$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z, είναι κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$ (μονάδες 5)

Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z| \le 3$ (μονάδες 3)

Μονάδες 8

Β2. Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2+\beta w+\gamma=0$, με w μιγαδικό αριθμό, $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, και

$$\left|\operatorname{Im}(z_1)-\operatorname{Im}(z_2)\right|=2$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$\beta=-4 \quad \text{και} \quad \gamma=5$$

Μονάδες 9

Β3. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς α_0, α_1, α_2 οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος **Β1**. Αν ο μιγαδικός αριθμός v ικανοποιεί τη σχέση:

$$v^3+\alpha_2 v^2+\alpha_1 v+\alpha_0=0$$

τότε να αποδείξετε ότι: $|v|<4$ **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $\left(f(x)+x\right)\left(f'(x)+1\right)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=1$ και
- $g(x)=x^3+\dfrac{3x^2}{2}-1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x,\quad x\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 9

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης

$$f(g(x))=1$$

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt=f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\text{εφ}\,x_0$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$
- $f(1)=1$
- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$g(x)=\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}\,dt,\quad x\in(1,+\infty)\ \text{ και }\ \alpha>1$$

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $f'(1)=0$ (μονάδες 4), καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Δ2. η g είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 3), και στη συνέχεια, να λύσετε την ανίσωση στο $\mathbb{R}$

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)du$$ (μονάδες 6)

Μονάδες 9

Δ3. η g είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση

$$(\alpha-1)\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt=\big(f(\alpha)-1\big)(x-\alpha),\quad x>1$$

έχει ακριβώς μια λύση.

Μονάδες 10