# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Θεωρία σελ. σχολ. βιβλίου 28.
**Α2.** Θεωρία σελ. σχολ. βιβλίου 14.
**Α3.** Θεωρία σελ. σχολ. βιβλίου 87.
**Α4.** **α.** Λ **β.** Σ **γ.** Λ **δ.** Λ **ε.** Λ.

**ΘΕΜΑ Β**

**Β1.**

$$P(\omega_1)=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}{x^2(x+1)\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}^{\,2}-1^2}{x^2(x+1)\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x\cancel{+1}\cancel{-1}}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{x\cancel{(x+1)}}{x^2\cancel{(x+1)}\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{1}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(-1)\left(\sqrt{(-1)^2-1+1}+1\right)}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}(x\ln x)'=\frac{1}{3}\left[(x)'\ln x+x(\ln x)'\right]=\frac{1}{3}\left[\ln x+x\frac{1}{x}\right]=\frac{1}{3}[\ln x+1]$$

Άρα $f'(x)=\frac{1}{3}[\ln x+1]$

$$P(\omega_3)=f'(1)=\frac{1}{3}[\ln 1+1]=\frac{1}{3}(0+1)=\boxed{\frac{1}{3}}$$

**Β2.**

- Α΄ Τρόπος : Έστω $\Gamma=\{\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$ και $\Delta=\{\omega_1\}$

$$P(\Gamma)+P(\Delta)=1\Leftrightarrow P(\Gamma)+P(\omega_1)=1\Leftrightarrow P(\Gamma)+\frac{1}{4}=1\Leftrightarrow P(\Gamma)=1-\frac{1}{4}\Leftrightarrow P(\Gamma)=\frac{3}{4}$$

$A'=\{\omega_2,\omega_3\}$

$$A'\subseteq\Gamma\Rightarrow P(A')\le P(\Gamma)\Rightarrow\boxed{P(A')\le\frac{3}{4}}\ (1)$$

- Β΄ Τρόπος :

$$P(A')=1-P(A)=1-\left((P\omega_1)+P(\omega_4)\right)=1-\frac{1}{4}-P(\omega_4)=\frac{3}{4}-P(\omega_4)\le\frac{3}{4}$$

Έστω $E=\{\omega_3\}$

$E\subseteq A'\Rightarrow P(E)\le P(A')\Rightarrow P(\omega_3)\le P(A')\Rightarrow \boxed{\frac{1}{3}\le P(A')}\ (2)$

Από (1), (2) : $\frac{1}{3}\le P(A')\le\frac{3}{4}$

**Β3.**

$P(A')=\frac{3}{4}\Leftrightarrow P(\omega_2)+P(\omega_3)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow P(\omega_2)+\frac{1}{3}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow P(\omega_2)=\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\Leftrightarrow P(\omega_2)=\frac{5}{12}$

$P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4)=1\Leftrightarrow \frac{1}{4}+\frac{5}{12}+\frac{1}{3}+P(\omega_4)=1\Leftrightarrow$

$P(\omega_4)=1-\frac{1}{4}-\frac{5}{12}-\frac{1}{3}\Leftrightarrow P(\omega_4)=0$

$P(A)=P(\omega_1)+P(\omega_4)=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$

$P(B)=P(\omega_1)+P(\omega_3)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{3}{12}+\frac{4}{12}=\frac{7}{12}$

$A\cap B=\{\omega_1\}$

$P(A\cap B)=P(\omega_1)=\frac{1}{4}$

$P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P(A-B)+P(B-A)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\frac{7}{12}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}-\frac{3}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

$\left.\begin{array}{l}A'=\{\omega_2,\omega_3\}\\ B'=\{\omega_2,\omega_4\}\end{array}\right\}\Rightarrow A'-B'=\{\omega_3\}$ Άρα $P(A'-B')=P(\omega_3)=\frac{1}{3}$

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Οι κλάσεις είναι $[\alpha,\alpha+c)$, $[\alpha+c,\alpha+2c)$, $[\alpha+2c,\alpha+3c)$, $[\alpha+3c,\alpha+4c)$

$\alpha=50$

$\frac{\alpha+3c+\alpha+4c}{2}=85\Leftrightarrow\frac{50+3c+50+4c}{2}=85\Leftrightarrow\frac{100+7c}{2}=85\Leftrightarrow 100+7c=170\Leftrightarrow$

$7c=170-100\Leftrightarrow 7c=70\Leftrightarrow \boxed{c=10}$

**Γ2.**

| Κλάσεις | $x_i$ | $f_i$ |
|---|---|---|
| [50-60) | 55 | 0,1 |
| [60-70) | 65 | 0,3 |
| [70-80) | 75 | 0,2 |
| [80-90) | 85 | 0,4 |
| ΣΥΝ. | | 1 |

$f_4=2f_3$ $\quad f_1+f_2+f_3+f_4=1\Leftrightarrow f_1+f_2+f_3+2f_3=1\Leftrightarrow \boxed{f_1+f_2+3f_3=1}\ (1)$

Η διάμεσος είναι 75 άρα : $f_1+f_2+\frac{f_3}{2}=\frac{f_3}{2}+f_4 \Leftrightarrow f_1+f_2=f_4 \Leftrightarrow \boxed{f_1+f_2=2f_3}\ (2)$

$(1)\overset{(2)}{\Rightarrow} 2f_3+3f_3=1 \Rightarrow 5f_3=1 \Rightarrow f_3=\frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{f_3=\frac{2}{10}=0,2}$

$f_4=2f_3=2\cdot 0,2 \Rightarrow f_4=0,4$

$\bar{x}=\sum_{i=1}^{4} x_i f_i \Rightarrow 74=55f_1+65f_2+75\cdot\frac{1}{5}+85\cdot\frac{2}{5} \Leftrightarrow 74=55f_1+65f_2+15+17\cdot 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 74=55f_1+65f_2+15+34 \Leftrightarrow 55f_1+65f_2=74-34-15 \Leftrightarrow 55f_1+65f_2=25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{11f_1+13f_2=5}\ (3)$

$(2) \Rightarrow f_1+f_2=2\cdot 0,2 \Leftrightarrow \boxed{f_1+f_2=0,4}\ (4)$

$$\left.\begin{array}{l}(3)\left.\begin{array}{l}11f_1+13f_2=5\\ \end{array}\right\}\\ (4)\left.\begin{array}{l}f_1+f_2=0,4\end{array}\right\}\end{array}\right\} f_1=0,4-f_2$$

$11(0,4-f_2)+13f_2=5 \Leftrightarrow 4,4-11f_2+13f_2=5 \Leftrightarrow 2f_2=5-4,4 \Leftrightarrow \boxed{f_2=0,3}$

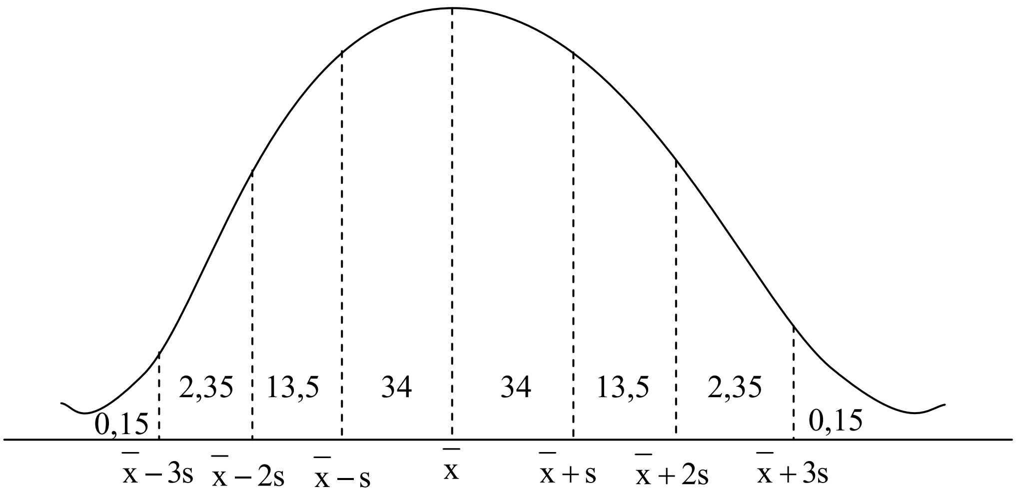
$f_1=0,4-0,3 \Leftrightarrow \boxed{f_1=0,1}$

**Γ3.** Το σύνολο του νέου δείγματος είναι το 60% του προηγούμενου άρα $f_i'=\frac{f_i}{0,6}$

Άρα $f_1'=\frac{0,1}{0,6}=\frac{1}{6}$, $f_2'=\frac{1}{2}$, $f_3'=\frac{1}{3}$

$\bar{y}=55\cdot\frac{1}{6}+65\cdot\frac{1}{2}+75\cdot\frac{1}{3}=\frac{55+195+150}{6}=\frac{200}{3}$

**Γ4.**




Τα $x_i \geq 74$ αντιστοιχούν στο 2,5% άρα $\bar{x}+2s=74$. Τα $x_i \leq 68$ αντιστοιχούν στο 16% άρα $\bar{x}-s=68$

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x}+2s=74\\ \bar{x}-s=68\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}68+s+2s=74\\ \bar{x}=68+s\end{array}\right\} 3s=74-68 \Leftrightarrow 3s=6 \Leftrightarrow \boxed{s=2}$$

$\bar{x}=68+2 \Leftrightarrow \boxed{\bar{x}=70}$, $\quad CV=\dfrac{s}{\bar{x}}=\dfrac{2}{70}=\dfrac{1}{35}<\dfrac{1}{10}$, άρα το δείγμα είναι ομοιογενές

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.**

$f'(x)=\ln x+1$

$f'(1)=1$

$f(1)=\kappa$

$(\varepsilon\varphi): y-f(1)=f'(1)(x-1)$

$y-\kappa=x-1 \Leftrightarrow y=x-1+\kappa$

$x'x \quad : y=0 \Rightarrow x=1-\kappa \quad \rightarrow A(1-\kappa,0)$

$y'y: \quad x=0 \Rightarrow y=\kappa-1 \quad \rightarrow B(0,\kappa-1)$

$$E=\frac{1}{2}|1-\kappa|\cdot|\kappa-1| \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\kappa-1)^2<2 \Leftrightarrow (\kappa-1)^2<4 \Leftrightarrow -2<\kappa-1<2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}-1<\kappa<3\\ \kappa>1,\ \kappa\in Z\end{array}\right\}\Rightarrow \kappa=2$$

**Δ2.**

$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_5$

$\bar{y}=31$

(α) Για $\kappa=2 \quad (\varepsilon\varphi): y=x+1$ δηλαδή $y_i=x_i+1 \Rightarrow \bar{y}=\bar{x}+1 \Rightarrow 31=\bar{x}+1 \Leftrightarrow \bar{x}=30$

(β) $$\bar{x}'=\frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i+3)+\sum_{i=21}^{35}x_i+\sum_{i=36}^{50}(x_i-\lambda)}{50} \Leftrightarrow \bar{x}'=\frac{\sum_{i=1}^{20}x_i+3\cdot 20+\sum_{i=21}^{35}x_i+\sum_{i=36}^{50}x_i-15\lambda}{50} \Leftrightarrow$$

$$\bar{x}'=\frac{\sum_{i=1}^{50}xi+60-15\lambda}{50} \Leftrightarrow 31=\frac{\sum_{i=1}^{50}xi}{50}+\frac{6}{5}-\frac{15\lambda}{50} \Leftrightarrow 31=\bar{x}+\frac{6}{5}-\frac{15\lambda}{50} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 31=30+\frac{6}{5}-\frac{15\lambda}{50} \Leftrightarrow \frac{15\lambda}{50}=\frac{1}{5} \Leftrightarrow \lambda=\frac{50}{75}=\frac{2}{3}$$

**Δ3.**

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{e}$

| | $0$ | $1/e$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | | ↗ |

Για $x\in\left(\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$ έχουμε f γνησίως αύξουσα άρα

$$\frac{1}{e}<\alpha<\beta<\gamma<e \Rightarrow f\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$$

Ξέρουμε ότι:

$f'\left(\frac{1}{e}\right)=0$ και $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}+2=\frac{2e-1}{e}>0$

Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=\frac{1}{e}$ το $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{2e-1}{e}>0$ άρα

$f(x)\geq f\left(\frac{1}{e}\right)>0$ οπότε

$0=f'\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)=e+2$

οπότε: $R=f(e)-f'\left(\frac{1}{e}\right)=e+2$

$$\overline{y}=\frac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+f(e)+f'\left(\frac{1}{e}\right)}{5}=\frac{\alpha\ln\alpha+2+\beta\ln\beta+2+\gamma\ln\gamma+2+e+2}{5}=$$

$$\frac{\ln\left(\alpha^{\alpha}\cdot\beta^{\beta}\cdot\gamma^{\gamma}\right)+8+e}{5}=\frac{\ln e^{7}+8+e}{5}=\frac{15+e}{5}=3+\frac{e}{5}$$

**Δ4.** Πρέπει $f'(t)=\varepsilon\varphi\omega>0\Leftrightarrow f'(t)>0\Leftrightarrow t>\frac{1}{e}$

Άρα $A=\{t_{11},...,t_{30}=1\}$

$f(t)>f'(t)+1\Leftrightarrow t\ln t+2>\ln t+2\Leftrightarrow \ln t(t-1)>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (t\neq 1, t>0)$

| | 0 | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\ln t$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $t-1$ | $-$ | 0 | $+$ |
| | $+$ | 0 | $+$ |

άρα $B=\{t_1,t_2...,t_{29}\}$

(α) $P(A)=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$

(β) $A\cap B=\{t_{11},...,t_{29}\}$

$P(A\cap B)=\frac{19}{30}$