

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ 2012**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Έστω συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  τοπικό μέγιστο;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα

**β)** Μια συνάρτηση  $f$  είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών της η εξίσωση  $f(x)=y$  έχει ακριβώς μία λύση ως προς  $x$

**γ)** Αν είναι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$

**δ)**  $(\sigma\phi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$ ,  $x \in \mathbb{R} - \{x | \eta\mu x = 0\}$

**ε)**  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$ , όπου  $f', g'$  είναι

συνεχείς συναρτήσεις στο  $[\alpha, \beta]$

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  και  $w$  για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \quad (1)$$

$$|w-5\bar{w}|=12 \quad (2)$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$  στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $\rho = 1$

**Μονάδες 6**

**B2.** Αν  $z_1, z_2$  είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς  $z$  με  $|z_1-z_2|=\sqrt{2}$  τότε, να βρείτε το  $|z_1+z_2|$ .

**Μονάδες 7**

**B3.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $w$  στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του  $|w|$

**Μονάδες 6**

**B4.** Για τους μιγαδικούς αριθμούς  $z, w$  που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι:

$$1 \leq |z-w| \leq 4$$

**Μονάδες 6**

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=(x-1)\ln x-1, x>0$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $\Delta_1=(0,1]$  και γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $\Delta_2=[1,+\infty)$ . Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $x^{x-1}=e^{2013}, x>0$  έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Αν  $x_1, x_2$  με  $x_1<x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in (x_1, x_2)$  τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0) + f(x_0) = 2012$$

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x)=f(x)+1$  με  $x>0$ , τον άξονα  $x'$  και την ευθεία  $x=e$  **Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ , η οποία για κάθε  $x>0$  ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \neq 0$
- $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e}$
- $\ln x - x = - \left( \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \right) \cdot |f(x)|$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της. **Μονάδες 10**

Αν είναι  $f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$ ,  $x>0$ , τότε:

**Δ2.** Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ (f(x))^2 \eta\mu \frac{1}{f(x)} - f(x) \right]$

**Μονάδες 5**

**Δ3.** Με τη βοήθεια της ανισότητας  $\ln x \leq x - 1$ , που ισχύει για κάθε  $x>0$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x>0,$$

όπου  $a>0$ , είναι κυρτή (μονάδες 2). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$F(x) + F(3x) > 2F(2x), \quad \text{για κάθε } x>0 \text{ (μονάδες 4).}$$

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός  $\beta>0$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $\xi \in (\beta, 2\beta)$  τέτοιο ώστε:

$$F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$$

**Μονάδες 4**