ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεώρημα σελ. 253

Α2. Ορισμός σελ. 191

Α3. Ορισμός σελ. 258

Α4. Σ, Σ, Λ, Λ, Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1..

$$(z-1)(\overline{z}-1)+(z+1)(\overline{z}+1)=4 \Leftrightarrow z\overline{z}\cancel{-z}\cancel{-\overline{z}}+1+z\overline{z}\cancel{+z}\cancel{+\overline{z}}=4 \Leftrightarrow$$

$$2z\overline{z}+2=4 \Leftrightarrow z\overline{z}=1 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow |z|=1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

Β2.

$$|z_1-z_2|=\sqrt{2} \Leftrightarrow (z_1-z_2)(\overline{z}_1-\overline{z}_2)=2 \Leftrightarrow z_1\overline{z}_1-z_1\overline{z}_2-z_2\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2=2 \Leftrightarrow$$

$$|z_1|^2-z_1\overline{z}_2-z_2\overline{z}_1+|z_2|^2=2 \xleftrightarrow{|z_1|=|z_2|=1} z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1=0$$

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\cdot(\overline{z}_1+\overline{z}_2)=z_1\overline{z}_1+z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2=|z_1|^2+z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1+|z_2|^2=$$

$$\underset{z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1=0}{\overset{|z_1|=|z_2|=1}{=}} 1+1=2$$

Άρα $|z_1+z_2|=\sqrt{2}$

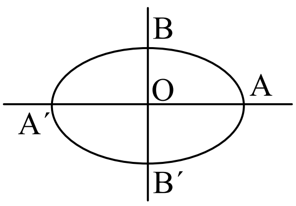
Β3.

Έστω $\omega=x+yi$

$$|\omega-5\overline{\omega}|=12 \Leftrightarrow |x+yi-5(x-yi)|=12 \Leftrightarrow |-4x+6yi|=12 \Leftrightarrow \sqrt{16x^2+36y^2}=12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16x^2+36y^2=144 \Leftrightarrow \frac{16x^2}{144}+\frac{36y^2}{144}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των ω είναι έλλειψη με $\alpha=3$ και $\beta=2$



Η ελάχιστη τιμή του $|\omega|$ θα είναι ίση με το (ΟΒ) και η μέγιστη με το (ΟΑ)

$$(OB)=\frac{(BB')}{2}=\beta=2 \text{ και } (OA)=\frac{(AA')}{2}=\alpha=3 \text{ άρα}$$

$$\boxed{2\le|\omega|\le 3}$$

Β4.

$$\big||z|-2\big|\le\big||z|-|\omega|\big|\le|z-\omega|\le|z|+|\omega|\le|z|+3$$

$$\big||z|-2\big|=|1-2|=1$$

$$|z|+3=1+3=4$$

Άρα $\boxed{1\le|z-\omega|\le 4}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$f(x)=(x-1)\ln x-1,\ x>0$

$f'(x)=\ln x+\dfrac{x-1}{x}=\ln x+1-\dfrac{1}{x}$

Για $x=1$ έχουμε ότι $f'(1)=0$

$f''(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}>0$ για κάθε $x>0$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα και έχει την $x=1$ μοναδική ρίζα. Οπότε :

$x<1 \Leftrightarrow f'(x)<f'(1)=0 \Leftrightarrow f'(x)<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα

$x>1 \Leftrightarrow f'(x)>f'(1)=0 \Leftrightarrow f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

Δηλαδή

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Για $x\in(0,1]$ έχουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα $f(A_1)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x-1)\ln x-1\right]=+\infty$ διότι $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)=-1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

και $f(1)=-1$ άρα $f(A_1)=[-1,+\infty)$

για $x\in[1,+\infty)$ έχουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα άρα $f(A_2)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[(x-1)\ln x-1\right]=+\infty$ διότι $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-1)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$

Άρα $f(A_2)=[-1,+\infty)$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι :

$f(A_1)\cup f(A_2)=[-1,+\infty)$

Γ2.

$x^{x-1}=e^{2013} \Leftrightarrow \ln x^{x-1}=\ln e^{2013} \Leftrightarrow (x-1)\ln x=2013 \Leftrightarrow (x-1)\ln x-1=2012 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=2012$

Για $x\in(0,1]$ το $f(A_1)=[-1,+\infty)$, δηλαδή $2012\in f(A_1)$ άρα υπάρχει μοναδικό $(f\searrow)$ $x_1\in(0,1): f(x_1)=2012$

Για $x\in[1,+\infty)$ το $f(A_2)=[-1,+\infty)$, δηλαδή $2012\in f(A_2)$ άρα υπάρχει μοναδικό $(f\nearrow)$ $x_2\in(1,+\infty): f(x_2)=2012$

Επομένως η εξίσωση έχει ακριβώς θετικές ρίζες

Γ3.

Έστω η συνάρτηση $g(x)=e^x\left(f(x)-2012\right)$

Η g είναι συνεχής στο (x_1,x_2) με $g'(x)=\left(f'(x)+f(x)-2012\right)e^x$

$$\left.\begin{array}{l} g(x_1)=e^{x_1}\left(f(x_1)-2012\right)=e^{x_1}\cdot 0=0 \\ g(x_2)=e^{x_2}\left(f(x_2)-2012\right)=e^{x_2}\cdot 0=0 \end{array}\right\}\Rightarrow g(x_1)=g(x_2)$$

Άρα ισχύει το Θ. Rolle, δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(x_1,x_2):g'(x_0)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{x_0}\left(f'(x_0)+f(x_0)-2012\right)=0\Leftrightarrow f'(x_0)+f(x_0)=2012$

Γ4.

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$ το $f(1)=-1$ άρα $f(x)\geq f(1)$ για κάθε $x>0$ δηλαδή $f(x)+1\geq f(1)+1\Leftrightarrow g(x)\geq 0$ για $x>0$ $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)+1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=-1\Leftrightarrow x=1$

Άρα $E(\Omega)=\int_1^e|g(x)|dx=\int_1^e g(x)dx=\int_1^e(x-1)\ln x dx=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}-x\right)'\ln x dx=$

$=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\frac{1}{x}dx=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x}{2}-1\right)dx=$

$=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e-\left[\frac{x^2}{4}-x\right]_1^e=\frac{e^2}{2}-e-\left[\frac{e^2}{4}-e-\left(\frac{1}{4}-1\right)\right]=$

$\frac{e^2}{2}\cancel{-e}-\frac{e^2}{4}\cancel{+e}-1+\frac{1}{4}=\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}=\frac{e^2-3}{4}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\int_1^{x^2-x+1}f(t)dt-\frac{x-x^2}{e}\geq 0$$

Έστω $g(x)=\int_1^{x^2-x+1}f(t)dt-\frac{x-x^2}{e}$

Δηλαδή $g(x)\geq 0$ για $x>0$

για $x=1\Rightarrow g(1)=0$ άρα $g(x)\geq g(1)$ για $x>0$ δηλαδή η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$.

Το 1 είναι εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$. Η f είναι συνεχής άρα η συνάρτηση $\int_1^{x^2-x+1}f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη, η g είναι παραγωγίσιμη για $x>0$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Από Θεώρημα Fermat : $g'(1)=0$

$g'(x)=f\left(x^2-x+1\right)\cdot(2x-1)-\frac{1-2x}{e}$

$g'(1)=0\Leftrightarrow f(1)+\frac{1}{e}=0\Leftrightarrow f(1)=-\frac{1}{e}<0$

Επειδή η f είναι συνεχής και $f(x)\neq 0$, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$ και επειδή $f(1)=-\frac{1}{e}<0$, θα ισχύει $f(x)<0$ gia $x\in(0,+\infty)$ δηλαδή $|f(x)|=-f(x)$

Άρα $\ln x - x = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)\cdot f(x)$

Η f συνεχής άρα $\frac{\ln t - t}{f(t)}$ συνεχής ως πηλίκο συνεχών, άρα $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt$ παραγωγίσιμη, άρα η f παραγωγίσιμη.

$\ln x - x = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)\cdot f(x) \overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{\ln x - x}{f(x)} = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)$

Θέτω $h(x) = \frac{\ln x - x}{f(x)}$ για $x > 0$, άρα $h(x) = \int_1^x h(t)dt + e$

$h'(x) = h(x)$ άρα $h(x) = c\cdot e^x$

$\left.\begin{array}{l}\text{Για } x = 1 \Rightarrow h(1) = e \\ \text{και } h(1) = c\cdot e\end{array}\right\} \Rightarrow c = 1$

Δηλαδή $h(x) = e^x \Leftrightarrow \frac{\ln x - x}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \frac{\ln x - x}{e^x}}$

Δ2.

$\lim_{x\to 0^+}\left[(f(x))^2 \eta\mu\frac{1}{f(x)} - f(x)\right]$

Θέτουμε $\frac{1}{f(x)} = u$ άρα $\lim_{x\to 0^+} u = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{\ln x - x} = 0$

$\lim_{u\to 0}\left[\frac{\eta\mu u}{u^2} - \frac{1}{u}\right] = \lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u - u}{u^2} \underset{(D.H.)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{u\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{2u} \underset{(D.H.)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{u\to 0}\frac{-\eta\mu u}{2} = 0$

Δ3.

Η f συνεχής άρα $F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt,\ x > 0$ παραγωγίσημη.

$F'(x) = f(x) < 0$ Η F' παραγωγίσημη αφού f παραγωγίσημη .

$F''(x) = f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x} - 1\right)e^x - (\ln x - x)e^x}{e^{2x}} = \frac{\frac{1}{x} - 1 - \ln x + x}{e^x} = \frac{\frac{1}{x} - \ln x + x - 1}{e^x}$

Επειδή $\ln x \le x - 1 \Leftrightarrow (x-1) - \ln x \ge 0$ και $\frac{1}{x} > 0$ άρα $F''(x) > 0$ δηλαδή η F είναι κυρτή.

F συνεχής στο $[x, 2x]$

F παραγωγίσιμη στο $(x, 2x)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (x, 2x)$: $F'(\xi_1) = \frac{F(2x) - F(x)}{x}$

F συνεχής στο $[2x, 3x]$

F παραγωγίσιμη στο $(2x, 3x)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (2x, 3x)$: $F'(\xi_2) = \frac{F(3x) - F(2x)}{x}$

F κυρτή άρα F΄ είναι γνησίως αύξουσα. Ισχύει ότι : $x < \xi_1 < 2x < \xi_2 < 3x$ άρα

$$F'(\xi_1) < F'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{F(2x)-F(x)}{\cancel{x}} < \frac{F(3x)-F(2x)}{\cancel{x}} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2F(2x) < F(3x)+F(x)$$

Δ4.

Θέτω $g(x) = 2F(x) - F(\beta) - F(3\beta)$

g συνεχής στο $[\beta, 2\beta]$

$g(\beta) = 2F(\beta) - F(\beta) - F(3\beta) = F(\beta) - F(3\beta)$

$\beta > 0$ άρα $\beta < 3\beta$ και $F''(x) = f(x) < 0$ δηλαδή F γνησίως φθίνουσα

$F(\beta) > F(3\beta)$ άρα $g(\beta) > 0$

$g(2\beta) = 2F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta) \overset{\Delta 3}{\Leftrightarrow} g(2\beta) < 0$ άρα $g(\beta) \cdot g(2\beta) < 0$

Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi \in (\beta, 2\beta) : g(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2F(\xi) = F(\beta) + F(3\beta)$

$g'(x) = 2F'(x) < 0$ για $x > 0$, άρα g΄ γνησίως φθίνουσα, άρα ξ μοναδικό.