

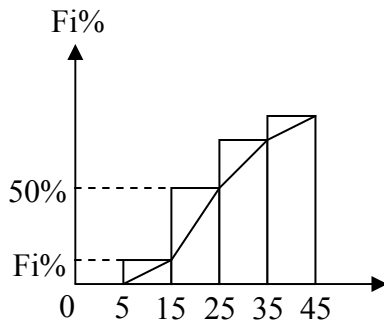
## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ Α

- A1. Θεωρία απόδειξη σελ. σχολ. βιβλ. 31.  
 A2. Ορισμός σελ. σχολ. βιβλ. 148.  
 A3. Ορισμός σελ. σχολ. βιβλ. 96.  
 A4. Λ, Σ, Λ, Σ, Σ.

### ΘΕΜΑ Β

#### B1.



Κατασκευάζουμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων. Ξέρουμε ότι η διάμεσος είναι η τιμή που αντιστοιχεί στο 50% των παρατηρήσεων άρα  $\delta = 25$

#### B2.

$$F_2 = 50\% \Rightarrow f_1\% + f_2\% = 50\% \text{ και } f_3\% + f_4\% = 50\% \text{ άρα}$$

$$\alpha + 4 + 3\alpha - 6 = 2\alpha + 8 + \alpha - 2 \Rightarrow 4\alpha - 2 = 3\alpha + 6 \Leftrightarrow \alpha = 8$$

[...)	$x_i$	$v_i$	$f_i\%$	$N_i$	$F_i\%$
[5-15)	10	12	20	12	20
[15-25)	20	18	30	30	50
[25-35)	30	24	40	54	90
[35-45)	40	6	10	60	100
ΣΥΝ.		60	100		

#### B3.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{v} = \frac{10 \cdot 12 + 20 \cdot 18 + 30 \cdot 24 + 40 \cdot 6}{60} = \frac{120 + 360 + 720 + 240}{60} = \frac{1440}{60} = 24$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 v_i}{v} = \frac{(10-24)^2 \cdot 12 + (20-24)^2 \cdot 18 + (30-24)^2 \cdot 24 + (40-24)^2 \cdot 6}{60}$$

$$= \frac{2352 + 288 + 864 + 1536}{60} = \frac{5040}{60} = 84 \Leftrightarrow s = \sqrt{84} \approx 9,17$$

#### B4.

Ψάχνουμε το ποσοστό που αντιστοιχεί στο διάστημα [36, 45). Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα οπότε θα ισχύει η αναλογία :  $\frac{8}{10} = \frac{x}{10} \Leftrightarrow x = 8\%$

**ΘΕΜΑ Γ**

$$P(\Gamma) = \frac{3v}{v^2 + 1}$$

$$P(I) = \frac{v+2}{v^2 + 1} \quad P(\Gamma \cap I) = \frac{v+1}{v^2 + 1}$$

$$P(\Gamma \cup I) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2 + 3} - 2)}{x^2 + x}$$

**Γ1.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \left[ 2 \frac{(\sqrt{x^2 + 3} - 2)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)}{(x^2 + x)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} \right] &= \lim_{x \rightarrow -1} \left[ 2 \frac{x^2 - 1}{x(x+1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \left[ 2 \frac{x-1}{x(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} \right] = 2 \frac{-1-1}{-1(\sqrt{1+3} + 2)} = \frac{-4}{-4} = 1 \end{aligned}$$

Άρα  $P(\Gamma \cup I) = 1$  άρα είναι βέβαιο ενδεχόμενο.

**Γ2.**

$$\begin{aligned} P(\Gamma \cup I) = P(\Gamma) + P(I) - P(\Gamma \cap I) &= \frac{3v}{v^2 + 1} + \frac{v+2}{v^2 + 1} - \frac{v+1}{v^2 + 1} = \\ \frac{3v + v + 2 - v - 1}{v^2 + 1} &= \frac{3v + 1}{v^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\Gamma \cup I) = 1 &\Leftrightarrow \frac{3v+1}{v^2+1} = 1 \Leftrightarrow 3v+1 = v^2+1 \Leftrightarrow v^2 = 3v \Leftrightarrow v^2 - 3v = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow v = 0, \text{ απορρίπτεται} \\ &\Leftrightarrow \boxed{v = 3} \end{aligned}$$

**Γ3.**

$$P(\Gamma) = \frac{9}{10}, P(I) = \frac{5}{10}, P(\Gamma \cap I) = \frac{4}{10}$$

$$P[(\Gamma - I) \cup (I - \Gamma)] = P(\Gamma) + P(I) - 2P(\Gamma \cap I) = \frac{9}{10} + \frac{5}{10} - \frac{8}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

**Γ4.**

$$\frac{N(\Gamma \cap I)}{N(\Omega)} = \frac{4}{10} \Leftrightarrow \frac{32}{N(\Omega)} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow N(\Omega) = 80$$

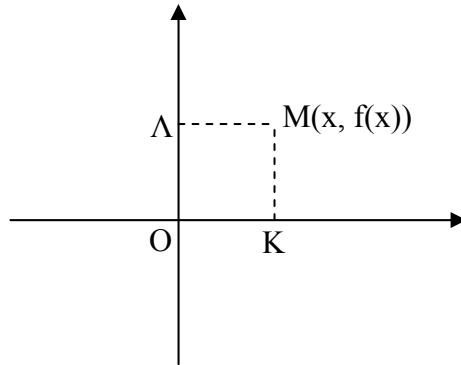
**ΘΕΜΑ Δ**
**Δ1.**

$$f'(x) = \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - 1 - \ln^2 x}{x^2} = \frac{-\ln^2 x + 2 \ln x - 1}{x^2} = -\frac{(\ln x - 1)^2}{x^2} \leq 0$$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα

**Δ2.**

Έστω  $g(x)$  η συνάρτηση του εμβαδού του ΟΚΜΛ



$$E = g(x) = x \cdot f(x) = x \cdot \frac{1 + \ln^2 x}{x} = 1 + \ln^2 x \quad \mu\epsilon \quad x > 0$$

$$g'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$		↘ ↗ ΕΛ.	

Άρα το εμβαδό του ΟΚΜΛ γίνεται ελάχιστο για  $x=1$  και  $f(1) = 1$  δηλαδή όταν γίνει τετράγωνο

**Δ3.** (ε):  $y = \lambda x + \beta$

$$f'(1) = -1 \text{ άρα } \lambda = -1$$

$$\text{άρα } y = -x + \beta$$

$$\text{δηλαδή } y_i = -x_i + \beta \Rightarrow \bar{y} = -\bar{x} + \beta = \beta - 10$$

$$\text{και } S_y = S_x = 2$$

$$CV_y \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{2}{|\beta - 10|} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow |\beta - 10| \geq 20 \Leftrightarrow \beta - 10 \geq 20 \Leftrightarrow \beta \geq 30$$

ή

$$\beta - 10 \leq -20 \Leftrightarrow \beta \leq -10$$

**Δ4.**

$P(A) < 1, P(A \cap B) < 1, P(A \cup B) < 1$  και στο διάστημα  $(0, 1]$  η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα

Ισχύει ότι:  $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$  άρα

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq P(A \cup B)$$

$$A \subseteq A \cup B \Leftrightarrow P(A) \leq P(A \cup B)$$

Επειδή η  $f$  γνησίως φθίνουσα για  $x \in (0, 1)$

$$\left. \begin{array}{l} f(P(A \cap B)) \geq f(P(A \cup B)) \\ f(P(A)) \geq f(P(A \cup B)) \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \geq 2f(P(A \cup B))$$