# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
# ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Απόδειξη θεωρήματος Fermat – Σελ. σχολ. Βιβλίου 260

**Α2.** Ορισμός ασύμπτωτης – Σελ. σχολ. βιβλίου 200

**Α3.** α. Σ, β. Σ, γ. Λ, δ. Λ, ε. Σ

**ΘΕΜΑ Β**

**Β1.**. $2|z-3i| = 2 \Leftrightarrow |z-3i| = 1$

Κύκλος Κ (0,3), ρ = 1

**Β2.** $|z-3i| = 1 \Leftrightarrow$

$$|z-3i|^2 = 1 \Leftrightarrow (z-3i)(\bar{z}+3i) = 1 \Leftrightarrow \bar{z}+3i = \frac{1}{z-3i}$$

**Β3.** Έστω $z = x + yi$

$$\overline{w} = \bar{z} + 3i + \frac{1}{\bar{z}+3i} = \frac{1}{z-3i} + z - 3i = \omega$$

$$w = z - 3i + \bar{z} + 3i = z + \bar{z} = 2x \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{matrix} |z-3i| = 1 \\ z = x + yi \end{matrix}\right\} \Rightarrow -1 \le x \le 1 \Leftrightarrow -2 \le 2x \le 2$$

$$-2 \le \omega \le 2$$

**Β4.** $|z-\omega| = \left|z - (z-3i) - \frac{1}{z-3i}\right| = |z - z + 3i - \bar{z} - 3i| = |-\bar{z}| = |z|$

**ΘΕΜΑ Γ**

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f'(0) = f(0) = 0$

$e^x\left(f'(x) + f''(x) - 1\right) = f'(x) + xf''(x)$

**Γ1.** $f(x) = \ln\left(e^x - x\right)$

$$\left(e^x f'(x) - e^x\right)' = \left(xf'(x)\right)'$$

$$e^x f'(x) - e^x = xf'(x) + c_2$$

$$e^x f'(x) - xf'(x) = e^x + c_2$$

$$\left(e^x - x\right)f'(x) = e^x + c_2$$

Άρα $f'(0) = 0$

$$0 = e^0 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = -1$$

Θεωρώ $g(x) = e^x - x$

$g'(x) = e^x - 1 \quad e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$g'(x) > 0 \Rightarrow e^x - 1 > 0 \Rightarrow e^x > 1$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g(x)$ | $\searrow$ | τ. ε. | $\nearrow$ |

$g(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$

Άρα $g(x) \neq 0 \ \forall x$

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \Rightarrow f(x) = \ln\left(e^x - x\right) + c$$

Άλλα $f(0) = 0$ άρα $0 = \ln\left(e^0 - 0\right) + c$

$0 = \ln 1 + c \Rightarrow c = 0$

Άρα $f(x) = \ln\left(e^x - x\right)$, με $x \in \mathbb{R}$

**Γ2.** Αφού $f'(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{e^x - x} > 0 \overset{e^x - x > 0}{\Leftrightarrow} e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | τ. ε. | $\nearrow$ |

$f(0) = \ln(e^0 - 0) = \ln 1 = 0$

**Γ3.** Αφού $f'(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} \Rightarrow$

$$f''(x) = \frac{\left(e^x - 1\right)'\left(e^x - x\right) - \left(e^x - 1\right)\left(e^x - x\right)'}{\left(e^x - x\right)^2} = \frac{e^x\left(e^x - x\right) - \left(e^x - 1\right)\left(e^x - 1\right)}{\left(e^x - x\right)^2} =$$

$$= \frac{e^{2x} - xe^x - \left(e^x - 1\right)^2}{\left(e^x - x\right)^2} = \frac{\cancel{e^{2x}} - xe^x - \cancel{e^{2x}} + 2e^x - 1}{\left(e^x - x\right)^2} = \frac{2e^x - xe^x - 1}{\left(e^x - x\right)^2}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x - xe^x - 1 = 0$

Έστω $h(x) = 2e^x - xe^x - 1 = 0$, συνεχής και παραγωγίσιμη στο R.

$h'(x) = 2e^x - e^x - xe^x = e^x - xe^x = e^x\left(1 - x\right)$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x\left(1 - x\right) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x\left(1 - x\right) > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $h(x)$ | $\nearrow$ | τ. μ. | $\searrow$ |

$h(1) = 2e^1 - 1e^1 - 1) = e - 1 > 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^{-x}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{-e^{-x}} = -\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(2e^{x} - xe^{x} - 1\right) = -1$

$A_1 = (-\infty, 1] \quad h \nearrow$

$h(A_1) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} h(x), h(1)\right] = (-1, e-1]$

$0 \in h(A_1)$, άρα έχει μία τουλάχιστον ρίζα και επειδή είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα είναι μοναδική

$A_2 = [1, +\infty) \quad h \searrow$

$h(A_2) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} h(x), h(1)\right]$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2e^{x} - xe^{x} - 1\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (2-x)e^{x} = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$

Άρα $h(A_2 = (-\infty, e-1]$

$0 \in h(A_2)$, άρα έχει μία τουλάχιστον ρίζα και επειδή είναι γνησίως φθίνουσα, η ρίζα είναι μοναδική

Ο πίνακας μεταβολών είναι ο εξής :

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $h(x)$ | | $-$ $\nearrow$ | $0$ | $+$ | | $+$ $\searrow$ | $0$ | $-$ | |
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\frown$ | Σ.Κ. | $\smile$ | | $\smile$ | Σ.Κ. | $\frown$ | |

Άρα εμφανίζει Σημείο Καμπής στο $M_1$ $(x_1, f(x_1))$ και στο $M_2$ $(x_2, f(x_2))$

**Γ4.** $\ln\left(e^{x} - x\right) = \sigma\upsilon\nu x$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \ln\left(e^{x} - x\right) - \sigma\upsilon\nu x$

Η φ είναι συνεχής στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών

$\varphi(0) = \ln\left(e^{0} - 0\right) - \sigma\upsilon\nu 0 = \ln 1 - 1 = 0 - 1 = -1 < 0$

$\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \ln\left(e^{\pi/2} - \dfrac{\pi}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2} = \ln\left(e^{\pi/2} - \dfrac{\pi}{2}\right) > 0$

Άρα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ και άρα υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα . Όμως $\varphi'(x) = \left(\ln\left(e^{x} - x\right) - \sigma\upsilon\nu x\right)' = \dfrac{e^{x} - 1}{e^{x} - x} + \eta\mu x > 0$ . Άρα η φ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

**ΘΕΜΑ Δ**

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}$

**Δ1.** $1 - f(x) = e^{2x} \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$

Θέτω x + t = u
dt = du
t = 0 $\Rightarrow$ u = x
t = - x $\Rightarrow$ u = 0

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_x^0 \frac{e^{2(u-x)}}{g(u)} du$$

$$\frac{1-f(x)}{\cancel{e^{2x}}} = \int_x^0 \cancel{\frac{1}{e^{2x}}} \frac{e^{2(u-x)}}{g(u)} du$$

$$1-f(x) = \int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)} du$$

$$f(x)-1 = \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$$

Όμοια $g(x)-1 = \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du$

Επειδή $e^{2x}$, f, g συνεχείς, τότε $\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$ και $\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du$ παραγωγίσιμες

$f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)}$ Ομοίως: $g'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)}$

$$f'(x)g(x) = f(x) \cdot g'(x) \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)g(x) - f(x)\cdot g'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} = c \\ \text{Για} \quad x = 0 \Rightarrow f(0) = 1 = g(0) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

**Δ2.** $f'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow f'(x)\cdot f(x) = e^{2x}$

$$\Leftrightarrow 2f'(x)\cdot f(x) = 2e^{2x}$$

$$\left[f^2(x)\right]' = \left(e^{2x}\right)'$$

$f^2(x) = e^{2x} + c$ $\quad \left(x = 0 \Rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow c = 0\right)$

$$f^2(x) = e^{2x} \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x) = e^x$$

**Δ3.** $\lim_{x \to 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{e^{1/x}}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x}{e^{1/x}} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{\frac{1}{x} e^{1/x}} \\ \text{Θέτω } y = \dfrac{1}{x},\ x \to 0^- \Rightarrow y \to -\infty \end{array}\right\} \lim_{y \to -\infty} \frac{1}{ye^y}$$

$$\lim_{y\to-\infty} ye^y = \lim_{y\to-\infty} \frac{y}{\frac{1}{e^y}} \overset{(D.H.)}{=} \lim_{y\to-\infty} \frac{1}{-\frac{1}{e^y}} = \lim_{y\to-\infty} \left(-e^y\right) = 0$$

$y \to -\infty \Rightarrow y < 0$ άρα $ye^y < 0 \Rightarrow \lim_{y\to-\infty} \frac{1}{ye^y} = -\infty$

**Δ4.** $E(\Omega) = \int_0^1 \left|F(x)\right| dx$

$F'(x) = e^{x^2} > 0 \Rightarrow F \nearrow$

$x > 1 \Rightarrow F(x) > 0$

$x < 1 \Rightarrow F(x) < 0$

$$E(\Omega) = \int_0^1 -F(x)dx = -\int_0^1 x'F(x)dx = -\left[xF(x)\right]_0^1 + \int_0^1 xe^{x^2} dx =$$

$$= \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1 = \frac{e}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e-1}{2}$$