

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ  
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)  
ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ  
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι:  $f'(x_0) = 0$

**Μονάδες 10**

**Α2.** Δίνεται συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ . Πότε η ευθεία  $y=\lambda x+\beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 5**

**Α3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z \neq 0$  ορίζουμε  $z^0=1$

β) Μια συνάρτηση  $f:A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η συνεπαγωγή: αν  $x_1 \neq x_2$ , τότε  $f(x_1) \neq f(x_2)$

γ) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x | \sin x = 0\}$  ισχύει:  $(\epsilon\phi x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

δ) Ισχύει ότι:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΩΝ

- ε) Οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y=x$  που διχοτομεί τις γωνίες  $xOy$  και  $x'Oy'$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί  $z$  και  $w$ , με  $z \neq 3i$ , οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z-3i|=1 \text{ και } w = z-3i + \frac{1}{z-3i}$$

- B1.** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$

**Μονάδες 7**

- B2.** Να αποδείξετε ότι:

$$\bar{z} + 3i = \frac{1}{z-3i}$$

**Μονάδες 4**

- B3.** Να αποδείξετε ότι ο  $w$  είναι πραγματικός αριθμός και ότι  $-2 \leq w \leq 2$

**Μονάδες 8**

- B4.** Να αποδείξετε ότι:  $|z-w|=|z|$

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ ,  $x \neq 0$

- Γ1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 6**

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΩΝ

**Γ2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(2, f(2))$

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) - 3}{x^2 - 1}$

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $f(0)=0$ , η οποία ικανοποιεί τη σχέση  $f(x) + x f'(x) = \eta \mu x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = x f(x) + \sigma \nu x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  είναι σταθερή στο  $\mathbb{R}$ .

**Μονάδες 6**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \frac{1 - \sigma \nu x}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } x \neq 0$$

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $1 - \sigma \nu x = x \eta \mu x$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (0, \pi)$  τέτοιο ώστε:

$$\xi \eta \mu \xi + \sigma \nu \xi = 1 + \frac{2}{\pi^2} \xi^2$$

**Μονάδες 7**

## ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΩΝ

### ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**