

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ  
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ  
ΤΡΙΤΗ 14 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2010  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \varepsilon\varphi x$ ,  $x \in A$ ,  
όπου  $A = \mathbb{R} - \{x / \sigma\upsilon\nu x = 0\}$

Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, \quad x \in A$$

**Μονάδες 10**

**A2.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 5**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

**β)** Αν  $a > 1$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$

**γ)** Αν η συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι 1-1, τότε ισχύει

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A$$

δ)  $\int \eta \mu x dx = \sigma \upsilon \nu x + c, c \in \mathbb{R}$

ε) Αν οι συναρτήσεις  $f', g'$  είναι συνεχείς σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε ισχύει

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) + \int f'(x)g(x)dx, x \in \Delta$$

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί  $z$  για τους οποίους ισχύει

$$|z| = |z - 2i|$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$  στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία με εξίσωση  $\psi = 1$

**Μονάδες 7**

**B2.** Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς  $z$ , να βρείτε εκείνους που έχουν μέτρο ίσο με  $\sqrt{2}$

**Μονάδες 10**

**B3.** Έστω  $z_1 = 1 + i$  και  $z_2 = -1 + i$  οι μιγαδικοί αριθμοί που βρήκατε στο ερώτημα B2.

Να αποδείξετε ότι  $z_1^4 + z_2^4 = -8$

**Μονάδες 8**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 3 \ln x, x > 0$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι κυρτή.

**Μονάδες 8**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι ο άξονας  $\psi'\psi$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$

**Μονάδες 7**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 2$  έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα  $(1, e)$

**Μονάδες 10**

### **ΘΕΜΑ Δ**

Έστω η παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$f'(x) = -f(x) + x, x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = e^x(f(x) - x + 1), x \in \mathbb{R}, \text{ είναι σταθερή.}$$

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = e^{-x} + x - 1, x \in \mathbb{R}$

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) \geq 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x = 1$

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων και όχι πριν τις 17:00.

**ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**