Μαθηματικά Κατεύθυνσης

ΛΥΣΗ ΘΕΜΑΤΟΣ Α

A1 σελ. 304
A2 σελ. 279
A3 σελ. 273
A4 α) Σ
β) Σ
γ) Λ
δ) Λ
ε) Σ

ΛΥΣΗ ΘΕΜΑΤΟΣ Β

Β1.
$$z + \frac{2}{z} = 2 \overset{z \neq 0}{\Leftrightarrow} z^2 - 2z + 2 = 0$$

Δ= 4 - 8 = - 4

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm i\sqrt{4}}{2} = 1 \pm i \begin{array}{l} \to 1 + i \\ \to 1 - i \end{array}$$

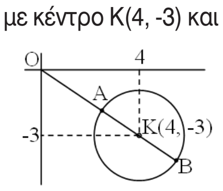
Β2. $(1+i)^{2010} + (1-i)^{2010} = [(1+i)^2]^{1005} + [(1-i)^2]^{1005} =$

$(2i)^{1005} + (-2i)^{1005} = (2i)^{1005} - (2i)^{1005} = 0$

Β3. $|w - 4 + 3i| = |1 + i - 1 + i| = |2i| = 2$

Κύκλος με κέντρο Κ(4, -3) και ακτίνα ρ=2.

Β4.



$(OK) = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$

(ΟΑ) = (ΟΚ) - ρ = 3
(ΟΒ) = (ΟΚ) + ρ = 7
άρα $3 \leq |w| \leq 7$

ΛΥΣΗ ΘΕΜΑΤΟΣ Γ

Γ1. $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$. $x \in R$

f συνεχής

$$f'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{2 \cdot (x^2+x+1)}{x^2+1}$$

Το τριώνυμο x^2+x+1 έχει $Δ = 1 - 4 = -3 < 0$ και $x^2 + 1 > 0$ άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in R$

Επομένως η f γνησίως αύξουσα στο R.

Γ2.

$$2\left(x^2 - 3x + 2\right) = \ln\left[\frac{(3x - 2)^2 + 1}{x^4 + 1}\right] \Leftrightarrow 2x^2 + 2(-3x + 2) =$$

$$= \ln\left[(3x - 2)^2 + 1\right] - \ln(x^4 + 1) \Leftrightarrow 2x^2 + \ln(x^4 + 1) =$$

$$= 2(3x - 2) + \ln\left[(3x - 2)^2 + 1\right] \Leftrightarrow f(x^2) = f(3x - 2)$$

Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη άρα είναι 1 - 1 επομένως

$$x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{array}$$

ΛΥΣΗ ΘΕΜΑΤΟΣ Γ

Γ3. Η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη για $x \in R$

$$f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f''		−	0	+	0	−	
f		∩	Σ.Κ.	∪	Σ.Κ.	∩	

Άρα τα σημεία καμπής είναι (-1, f(-1)) = (-1, -2+ln2)
(1, f(1)) = (1, 2+ln2)
$f'(-1) = 1$ και $f'(1) = 3$

εφαπτομένες:
$(ε_1)$:y + 2 - ln2 = x+1 ⇔ y=x -1+ln2
$(ε_2)$:y - 2 - ln2 = 3(x-1) ⇔ y= 3x -1+ln2
Για x=0 η $(ε_1)$ τέμνει τον $ψ'ψ$ στο (0, ln2-1) και

η $(ε_2)$ τέμνει τον $ψ'ψ$ στο (0, ln2-1)

Γ4.
$$\int_{-1}^{1} x\left[2x + \ln(x^2+1)\right] dx = \int_{-1}^{1} 2x^2 dx + \int_{-1}^{1} x\ln(x^2+1)dx$$

Υπολογισμός του $\int_{-1}^{1} x\ln(x^2+1)dx$

θέτω $u=x^2+1$
du=2xdx ⇔ 1/2 du = xdx
x= -1 ⇔ u=2
x= 1 ⇔ u=2
Άρα $\int_{2}^{2} \frac{1}{2}\ln u \, du = 0$

Επομένως
$$\int_{-1}^{1} xf(x)\, dx = \int_{-1}^{1} 2x^2\, dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right] = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right] = \frac{4}{3}$$

ΛΥΣΗ ΘΕΜΑΤΟΣ Δ

f συνεχής $f : R \to R \quad f(x) \neq x$

$$f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt$$

Δ1.
$$f(x) = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt + x$$

Η f συνεχής άρα η $\frac{t}{f(t) - t}$ συνεχής συνάρτηση ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων άρα η $\int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt$ παραγωγίσιμη

οπότε η f παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συ-ναρτήσεων με $f'(x) = \frac{x}{f(x) - x} + 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{f(x) - x}$

Δ2. g παραγωγίσιμη για $x \in R$ και
$$g'(x) = 2f(x) f'(x) - 2f(x) - 2x f'(x) =$$

$$= 2f(x) \frac{f(x)}{f(x) - x} - 2f(x) - 2x \frac{f(x)}{f(x) - x} =$$

$$= \frac{2f^2(x) - 2f^2(x) + 2x f(x) - 2x f(x)}{f(x) - x} = 0$$

άρα η g σταθερή
Δ3. f(0) = 3
g(0) = 9 άρα g(x) = 9
$f^2(x) - 2x f(x) = 9 \Leftrightarrow f^2(x) - 2x f(x) = 9 \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = 9 + x^2$
$\Leftrightarrow f(x) - x = \sqrt{9 + x^2} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{9 + x^2}$

θέτω h(x) = f(x) - x και $h(x) \neq 0$, h συνεχής άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R.
h(0) = f(0) = 3 > 0 άρα h(x) > 0 ⇔ f(x) - x > 0
Δ4. Θεωρώ τη συνάρτηση
$$Φ(x) = \int_x^{x+1} f(t)\, dx, \quad x \in R$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη (f συνεχής) οπότε:
$Φ'(x) = f(x+1) - f(x)$

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{x + \sqrt{x^2 + 9}}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$x^2 < x^2 + 9 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow -\sqrt{x^2 + 9} < x < \sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{x^2 + 9} < x \Leftrightarrow 0 < x + \sqrt{x^2 + 9}$$

Άρα $f'(x) > 0$ δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα.

Ισχύει ότι $x+1 > x \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x + 1) > f(x) \Leftrightarrow f(x + 1) - f(x) > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow φ'(x) > 0$ άρα $φ \uparrow$ στο R.

Έχουμε $x < x + 1 \Leftrightarrow φ(x) < φ(x + 1) \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow \int_x^{x+1} f(t)\, dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)\, dt$$