ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Α')
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1) Θεωρία (από το σχολικό βιβλίο).

Α2) **α)** **Λ** **β)** **Σ** **γ)** **Σ** **δ)** **Λ**

Α3) **α)** $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}, g(x)\neq 0$

β) $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

γ) $\left(e^x\right)'=e^x$

δ) $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$

Θέμα Β

Β1) $\Sigma\nu_i=50\Rightarrow \nu_3=50-(\nu_1+\nu_2+...+\nu_6)=50-35\Rightarrow \nu_3=15$

Ημέρες απουσίας	Υπάλληλοι	Σχετική Συχνότητα f_i%	Αθροιστική Συχνότητα	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα %	$x_i\nu_i$
0	8	16	8	16	0
1	10	20	18	36	10
2	15	30	33	66	30
3	10	20	43	86	30
4	5	10	48	96	20
5	2	04	50	100	10
Αθροίσματα	50	100			100

Β2) $\bar{x}=\frac{\Sigma x_i\nu_i}{\nu}\Rightarrow \bar{x}=\frac{100}{50}\Rightarrow \bar{x}=2$

Β3) Επειδή ν = 50, άρτιος τότε $\delta=\frac{t_{25}+t_{26}}{2}\Rightarrow \delta=\frac{2+2}{2}\Rightarrow \delta=2$

Β4) Το πλήθος των υπαλλήλων που απουσίασαν από 2 έως και 4 ήμερες θα είναι:
$\nu_3+\nu_4+\nu_5=15+10+5=30$ και το αντίστοιχο ποσοστό θα είναι:
$(f_3+f_4+f_5)\%=30+20+10=60\%$

Θέμα Γ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1}\ , & x<1\\ \sqrt{x+3}+\alpha\ , & x\geq 1\end{cases}\quad , a\in R$$

Γ1)

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 1^-}(x^2-4x+3)=1^2-4\cdot 1+3=0\\ &\lim_{x\to 1^-}(x^2-1)=1^2-1=0\end{aligned}\right\}\ \textit{Απροσδιόριστη Μορφή}\ \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$x^2-4x+3=(x-3)(x-1)\qquad (1)$$

$$\Delta=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3=16-12=4$$

$$x_{1,2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{4}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm 2}{2}=\left\langle\begin{aligned}&\frac{6}{2}=3\\ &\frac{2}{2}=1\end{aligned}\right.$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-4x+3}{x^2-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{(1)}{=}}\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-3)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-3}{x+1}=\frac{1-3}{1+1}=\frac{-2}{2}=-1\quad (2)$$

Γ2)

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(\sqrt{x+3}+a)=\sqrt{1+3}+a=\sqrt{4}+a=2+a\quad (3)$$

Γ3) Εφόσον η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ θα ισχύει :

$$f(1)=\sqrt{1+3}+a=\sqrt{4}+a=2+a\quad (4)$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1)\Leftrightarrow$$

$$\underset{(4)}{\overset{(2),(3)}{\Leftrightarrow}}-1=2+a=2+a\Leftrightarrow 2+a=-1\Leftrightarrow a=-3$$

Γ4)

$$A=3f(0)+2f(6)=3\cdot\frac{0^2-4\cdot 0+3}{0^2-1}+2\cdot\left(\sqrt{6+3}-3\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=3\cdot\frac{3}{-1}+2\left(\sqrt{9}-3\right)\Rightarrow A=-9+0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=-9$$

Θέμα Δ

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+\alpha x+\beta\quad ,\quad \alpha,\beta\in R$$

Δ1) Εφόσον η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 2$ τότε θα είναι:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+ax+\beta\right)'=\frac{3x^2}{3}-\frac{5}{2}\cdot 2x+a=x^2-5x+a \quad (1).$$

$$f'(2)=0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}2^2-5\cdot 2+a=0\Leftrightarrow 4-10+a=0\Leftrightarrow a=6$$

Εφόσον η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(0,1) θα ισχύει:

$$\mathrm{f}(0)=1\Leftrightarrow \frac{1}{3}\cdot 0^3-\frac{5}{2}0^2+6\cdot 0+\beta=1\Leftrightarrow \beta=1$$

Δ2) Για α = 6, β = 1 έχω: $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\frac{1}{3}\mathrm{x}^3-\frac{5}{2}\mathrm{x}^2+6\mathrm{x}+1$

$$f'(x)=x^2-5x+6$$

$$x^2-5x+6=(x-3)(x-2) \qquad (2)$$

$$\Delta=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=25-24=1$$

$$x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm 1}{2}=\left\langle\begin{array}{l}\frac{6}{2}=3\\[2ex] \frac{4}{2}=2\end{array}\right.$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\overset{(2)}{\Leftrightarrow}(x-3)(x-2)=0\Leftrightarrow x=3 \;\; ή \;\; x=2$$

Πίνακας Μεταβολών της f

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
f΄(x)		+	0	−	0	+	
f(x)		↗		↘		↗	
			Τ.Μ.		Τ.Ε.		

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,2)$, $(3,+\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (2, 3)

Δ3) Η f για x = 2 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(2)=\frac{1}{3}2^3-\frac{5}{2}\cdot 2^2+6\cdot 2+1\Rightarrow f(2)=\frac{17}{3}$

Η f για x = 3 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(3)=\frac{1}{3}3^3-\frac{5}{2}\cdot 3^2+6\cdot 3+1\Rightarrow f(3)=\frac{11}{2}$

Δ4) Παρατηρώ ότι για $\mathrm{x}\in[1,2]$ είναι η f συνεχής σαν πολυωνυμική άρα:

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x+1\right)dx=\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{4}-\frac{5}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+6\frac{x^2}{2}+x\right]_1^2=$$

$$=\frac{2^4}{12}-\frac{5\cdot 2^3}{6}+3\cdot 2^2+2-\frac{1^4}{12}+\frac{5\cdot 1^3}{6}-3\cdot 1^2-1=$$

$$=\frac{16}{12}-\frac{40}{6}+12+2-\frac{1}{12}+\frac{5}{6}-3-1=\frac{65}{12}$$