ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^0

Α. Θεώρημα σελ. 251.
Β. Ορισμός σελ. 213.
Γ. **α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Λ**

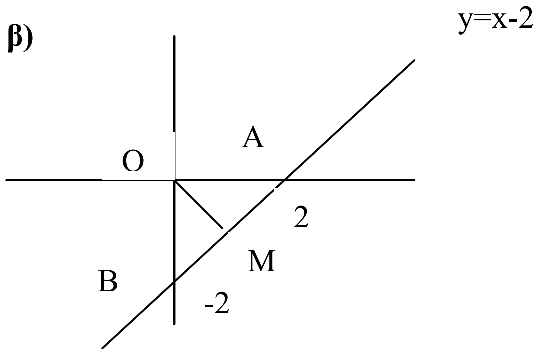
ΘΕΜΑ 2^0

Α. α) $z=(2\lambda+1)+(2\lambda-1)i \quad , \quad \lambda \in R$

Έστω $z=x+yi$, τότε θα είναι :

$\begin{cases} x=2\lambda+1 \\ y=2\lambda-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2\lambda \\ y=x-1-1,\ y=x-2 \end{cases}$ Άρα ο μιγαδικός z , βρίσκεται πάνω στην ευθεία y=x-2.

β)



Φέρνουμε ΟΜ κάθετη στην ευθεία. Το σημείο Μ είναι η εικόνα του μιγαδικού με το ελάχιστο μέτρο. Το σημείο Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ με Α(2,0) και Β(0,-2) , αφού το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές. Άρα

$\mathrm{M}\left(\dfrac{x_A+x_B}{2},\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)=\mathrm{M}(1,-1)$. Επομένως ο $z_0=1-i$ είναι ο μιγαδικός αριθμός με το ελάχιστο μέτρο, με $|z_0|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

Β. Έστω $w=\alpha+\beta i$, τότε : $|w|^2+\overline{w}-12=1-i \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\alpha-\beta i-12=1-i$

οπότε β=1 και $\alpha^2+1+\alpha-12=1 \Leftrightarrow \alpha^2+\alpha-12=0$, $\alpha=-4$,$\alpha=3$. Άρα w=-4+i , w=3+i.

ΘΕΜΑ 3^0

Α.

$f(x) \geq 1$ άρα $f(x) \geq f(0)$

Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(0)$

Από Θεώρημα Fermat έχουμε ότι $f'(0) = 0$ (1)

$f'(x) = a^x \ln a - \frac{1}{x+1}$ άρα $x > 0$ από (1)

$a^0 \ln a - \frac{1}{1} = 0$

$\ln a = 1$

$a = e$

Β.

Για $\alpha = e$

α. $f''(x) = e^x \ln e + \frac{1}{(x+1)^2} > 0$

$e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0$

Άρα η f είναι κυρτή

β. $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$

$x = 0$ προφανής ρίζα της $f'(x) = 0$

$f''(x) > 0$ άρα f' γνησίως αύξουσα επομένως η $x = 0$ είναι μοναδική ρίζα της f'.

- Για $x < 0$

  $f'(x) < f'(0)$

  $f'(x) < 0$

- Για $x > 0$

  $f'(x) > f'(0)$

  $f'(x) > 0$

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

γ. Θέτω $g(x)=(x-2)\left[f(\beta)-1\right]+(x-2)\left[f(\gamma)-1\right]$

η g είναι συνεχής στο [1,2] ως άθροισμα και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

$\begin{matrix} g(1)=1-f(\beta)<0 \\ g(2)=f(\gamma)-1>0 \end{matrix}$ διότι $f(x)>1$ για κάθε $x>-1$

άρα από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα x_0 έτσι ώστε $g(x_0)=0$

ΘΕΜΑ 4^{O}

α. Υπολογίζουμε το παρακάτω όριο:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{(1-\sqrt{1-t^2})(1+\sqrt{1-t^2})}{t^2(1+\sqrt{1-t^2})}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-(1-t^2)}{t^2(1+\sqrt{1-t^2})}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2(1+\sqrt{1-t^2})}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}G(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{H(x)}{x}-\int_0^x f(t)dt+3\right)$$

Ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{H(x)}{x}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{H'(x)}{x'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\int_0^x tf(t)dt\right)'}{1}=\lim_{x\to 0^+}(xf(x))=0 \quad \text{άρα}$$

$$\lim_{x\to 0^+}G(x)=0-0+3=3$$

Ακόμα ισχύει ότι:

$$G(0)=6\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}=6\cdot\frac{1}{2}=3$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0^+}G(x)=G(0)$ άρα η G συνεχής στο 0 και η G είναι συνεχής στο (0,2] ως άθροισμα συνεχών.

β) $G(x)=\dfrac{H(x)}{x}-\displaystyle\int_0^x f(t)dt+3$

παραγωγίσιμη διότι η f είναι συνεχής άρα $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ και $H(x)$ παραγωγίσιμες άρα και η $\dfrac{H(x)}{x}$ παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Συνεπώς και η $G(x)$ παραγωγίσιμη με :

$$G'(x)=\frac{H'(x)\cdot x-H(x)}{x^2}-f(x)=\frac{x^2\cdot f(x)}{x^2}-\frac{H(x)}{x^2}-f(x)$$

.

$$=-\frac{H(x)}{x^2},0<x<2$$

γ. Η G συνεχής στο [0,2]

Η G παραγωγίσιμη στο (0,2) με $G'(x)=-\frac{H(x)}{x^2}$

$G(0)=3$

$$G(2)=\frac{H(2)}{2}-\int_0^2 f(t)dt+3=\frac{\int_0^2 tf(t)dt}{2}-\int_0^2 f(t)dt+3=$$

$$=\frac{\int_0^2 tf(t)dt}{2}-\frac{\int_0^2 2f(t)dt}{2}+3=\frac{\int_0^2 (t-2)f(t)dt}{2}+3=\frac{0}{2}+3=3$$

άρα $G(0)=G(3)$ και από το Θ. Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $a\in(0,2)$ ώστε

$$G'(a)=0\Leftrightarrow -\frac{H(a)}{a^2}=0\Leftrightarrow H(a)=0$$

δ)

$$\alpha\int_0^\xi t\,f(t)\,dt=\xi^2\int_0^\alpha f(t)dt\Leftrightarrow -\frac{\int_0^\xi t\,f(t)\,dt}{\xi^2}=\frac{\int_0^\alpha f(t)dt}{a}\Leftrightarrow$$

$$G'(\xi)=\frac{3-G(a)}{a}\Leftrightarrow G'(\xi)=\frac{G(a)-G(0)}{a-0}.\ (1)$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ για την G(x) ,στο διάστημα (ο,α).

G(x) : συνεχής στο [0,α] , παραγωγίσιμη στο (ο,α) οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,\alpha):\ G'(\xi)=\frac{G(a)-G(0)}{a-0}$. επομένως καταλήγουμε στην (1).