ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. θεωρία σελ. σχολικού βιβλίου 235

Α.2. Ορισμός από τη σελίδα 191 του σχολικού βιβλίου

Β. α. Σ, β. Σ, γ. Λ, δ. Λ, ε. Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α)

$$\left|(x+yi)(i+2\sqrt{2})\right|=6$$

$$\left|(xi-y+2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}yi)\right|=6$$

$$\left|2\sqrt{2}x-y+(2\sqrt{2}y+x)i\right|=6$$

$$(2\sqrt{2}x-y)^2+(2\sqrt{2}y+x)^2=6^2$$

$$8x^2+y^2-4\sqrt{2}xy+8y^2+x^2+4\sqrt{2}xy=36$$

$$9x^2+9y^2=36$$

$$x^2+y^2=4$$

Άρα $z\in C$: κύκλος Ο(0,0) ρ=2

β)

$$\left|x+yi-1+i\right|=\left|x+yi-3+3i)\right|$$

$$\left|x-1+(y+1)i\right|=\left|x-3+(y+3)i\right|$$

$$(x-1)^2+(y+1)^2=(x-3)^2+(y+3)^2$$

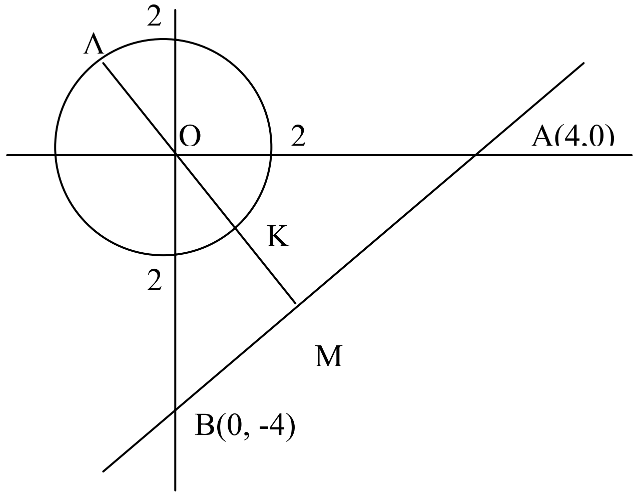
$$x^2-2x+1+y^2+2y+1=x^2-6x+9+y^2+6y+9$$

$$4x-4y-16=0$$

$$x-y-4=0$$

Άρα $w\in C$: x-y-4=0

γ)



Μ μέσο ΑΒ αφού το τρίγωνο ΟΑΒ ισοσκελές

$M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2},\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)=M(2,-2)$ άρα ελάχιστη τιμή του $|W|$ είναι $|W|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

δ) $|z-w|_{\min}=(KM)$ =(OM)-(OK)= $|W|-\rho=2\sqrt{2}-2$.

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u>

α) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \qquad \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$

f(0)=0

άρα f συνεχής στο 0

β) f ΄(x)=lnx+1 για x>0

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \dfrac{1}{e}$

x	0		2		$+\infty$
		-		+	
f(x)		↘		↗	

T.E $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e^2}$

$$x \in A_1 = \left(0, \frac{1}{e}\right] \Rightarrow \Sigma T_f = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), \lim_{x \to 0^+} f(x)\right) = \left[-\frac{1}{e}, 0\right)$$

$$x \in A_2 = \left[\frac{1}{e}, +\infty\right) \quad \Rightarrow \quad \Sigma T_f = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$$

με $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty$

γ) $x = e^{\frac{a}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \frac{a}{x} \Leftrightarrow x \ln x = a \Leftrightarrow f(x) = a, \text{ για } x > 0$

Αν a<-1/e η f(x) δεν έχει ρίζα

Αν a=-1/e η f(x) έχει ρίζα x=1/e

Αν $a \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right) \Rightarrow$ η f(x)=a έχει ακριβώς 2 ρίζες (μία στο A_1 και μία στο A_2)

Αν $a \geq 0$ η f(x) έχει μοναδική ρίζα στο A_2

δ) f΄(x)=lnx+1, x>0

f΄΄(x)=(lnx+1)΄=1/x>0, άρα η f΄είναι γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Από ΘΜΤ για την f στο διάστημα $[x, x+1]$, $x > 0$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x, x+1)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x + 1 - x} = f(x+1) - f(x)$$

Είναι $x < \xi < x + 1$ και f΄είναι γνησίως αύξουσα, άρα

$$f'(\xi) < f'(x+1) \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$$

ΘΕΜΑ 4º

α)

$$f(x)=(10x^3+3x^3)\int_0^2 f(t)dt-45\Rightarrow$$

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(10x^3+3x^3)\int_0^2 f(t)dt-\int_0^2 45dt\Rightarrow$$

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 f(t)dt\int_0^2(10x^3+3x)dx-90\Rightarrow$$

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 f(t)dt\cdot\left[\frac{10}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2\right]_0^2-90\Rightarrow$$

$$\int_0^2 f(x)dx=46\int_0^2 f(t)dt-90\Rightarrow$$

$$-45\int_0^2 f(x)dx=-90\Rightarrow\int_0^2 f(x)dx=2$$

Άρα $f(x)=20x^3+6x-45$

β) Έχω για $x\in R$

$$g''(x_0)=\lim_{x\to x0}\frac{g'(x)-g'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x0}\frac{g'(x_0-h)-g'(x_0)}{-h}=\lim_{x\to x0}\frac{g'(x_0)-g'(x_0-h)}{-h}$$

θέτω x_0-x=h

γ.

i.

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x-h)}{2h}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x)+g'(x)-g'(x-h)}{h}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}[g''(x)+g''(x)]=g''(x)$$

$f(x)+45=20x^3+6x$

Είναι

- $g''(x)=20x^3+6x\Leftrightarrow g''(x)=(5x^4+3x^2)'$, άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $g'(x)=5x^4+3x^2+c_1$
  και για x=0, $g'(0)=c_1=1$, άρα $g(x)=5x^4+3x^2+1$

- $g'(x)=5x^4+3x^2+1\Leftrightarrow g'(x)=(x^5+x^3+x+c_2)'$
  άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $g(x)=x^5+x^3+x+c_2$
  και για x=0, $g(0)=c_2=1$, άρα $g(x)=x^5+x^3+x+1$

ii. $g'(x)=5x^4+3x^2+1>0$, για κάθε $x\in R$