ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2007

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ</u>

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Θεωρία, σελίδα 98 σχολ. βιβλίου.
Α.2 Θεωρία - Ορισμός, σελίδα 141 σχολ. βιβλίου
Α.3 Θεωρία - Ορισμός, σελίδα 280 σχολ. βιβλίου.

Β. α. → Λ β. → Λ γ. → Λ δ. → Σ ε. → Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α.

$z = \frac{2+\alpha i}{\alpha + 2i}$ α ∈ $\mathbb{R}$. Άρα $|z| = \left|\frac{2+\alpha i}{\alpha+2i}\right| = \frac{|2+\alpha i|}{|\alpha+2i|} = \frac{\sqrt{4+\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+4}} = 1$

Άρα η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ = 1.

β.

Για α = 0 έχουμε: $z_1 = \frac{2+0i}{0+2i} = \frac{1}{i} = -i = 0 - i$

Για α = 2 έχουμε: $z_2 = \frac{2+2i}{2+2i} = 1 = 1 + 0i$

i. Αν Α, Β οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα, τότε η απόστασή τους είναι d(A, B) = $|z_1 - z_2| = |(0-i) - (1+0\,i)| = |-1-i| = |1+i| = \sqrt{2}$.

ii. $(z_1)^{2\nu} = (-z_2)^{\nu} \Leftrightarrow \left((z_1)^2\right)^{\nu} = (-z_2)^{\nu} \Leftrightarrow \left((-i)^2\right)^{\nu} = (-1)^{\nu} \Leftrightarrow (-1)^{\nu} = (-1)^{\nu}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, που ισχύει άρα και η αρχική.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, με
$f'(x) = 3x^2 - 3$
$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x - 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Από τον πίνακα μεταβολών της f προκύπτει ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -1$, το $f(-1) = 2συν^2θ > 0$ και έχει τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 1$, το $f(1) = (-2(1 + ημ^2θ)$.

$f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\frown$		$\smile$	

Προκύπτει ότι η f έχει σημείο καμπής στο $x_3 = 0$, το $f(x_3) = -2ημ^2θ$.

β.

i. Επειδή $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $f(-1) = 2συν^2θ > 0$ και f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$ προκύπτει: $f\big((-\infty, -1]\big) = (-\infty, 2συν^2θ]$

Επειδή $0 \in f\big((-\infty, -1]\big)$, υπάρχει $ρ_1 \in (-\infty, -1)$ ώστε $f(ρ_1) = 0$. Η ρίζα $ρ_1$ είναι και μοναδική στο $(-\infty, -1]$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

ii. Επειδή $f(-1) = 2συν^2θ > 0$, $f(1) = -2(1 + ημ^2θ) < 0$ και f γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$ προκύπτει: $f\big([-1, 1]\big) = \big[-2(1 + ημ^2θ), 2συν^2θ\big]$

Επειδή $0 \in f\big([-1, 1]\big)$, υπάρχει $ρ_2 \in (-1, 1)$ ώστε $f(ρ_2) = 0$. Η ρίζα $ρ_2$ είναι και μοναδική στο $[-1, 1]$, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

iii. Επειδή $f(1) = -2(1 + ημ^2θ) < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ προκύπτει: $f\big([1, +\infty)\big) = \big[-2(1 + ημ^2θ), +\infty\big)$.

Επειδή $0 \in f\big([1, +\infty)\big)$, υπάρχει $ρ_3 \in (1, +\infty)$ ώστε $f(ρ_3) = 0$. Η ρίζα $ρ_3$ είναι και αυτή μοναδική στο $[1, +\infty)$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα η εξίσωση f(x) = 0 έχει ακριβώς 3 ρίζες στο $\mathbb{R}$.

γ. Έχουμε
$A(-1,\ 2συν^2θ)),\ \ B(1,\ -2(1 + ημ^2θ)),\ \ Γ(0,\ -2ημ^2θ)$

$A \in (ε)$ αφού
$2συν^2θ = -2(-1) - 2ημ^2θ \Leftrightarrow 2(συν^2θ) = -2\ (-1) - 2ημ^2θ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2 - 2ημ^2θ = 2 - 2ημ^2θ$

$B \in (ε)$ αφού
$-2(1 + ημ^2θ) = -2 \cdot 1 - 2ημ^2θ)$ ή $-2 - 2ημ^2θ = -2 - 2ημ^2θ$.

$Γ \in (ε)$ $-2ημ^2θ = 2 \cdot 0 - 2ημ^2θ$ ή $-2ημ^2θ = -2ημ^2θ$.

δ. $f(x) = y \Leftrightarrow$
$x^3 - 3x - 2ημ^2θ = -2x - 2ημ^2θ \Leftrightarrow$
$x^3 - x = 0 \Leftrightarrow$
$x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$
$x(x - 1)\ (x + 1) = 0 \Leftrightarrow$
$x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = -1$.

$$E = \int_{-1}^{1} |f(x) - y|\,dx = \int_{-1}^{1} |x^3 - x|\,dx \overset{(*)}{=}$$
$$= \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx - \int_{0}^{1} (x^3 - x)\,dx = \frac{1}{2}\ τ.μ.$$

$(*)\ x^3 - x = x(x - 1)(x + 1)$
$x^3 - x > 0$ για $x \in (-1,\ 0)$.
$x^3 - x < 0$ για $x \in (0,\ 1)$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Αφού f, g συνεχείς στο [0, 1] η F είναι παραγωγίσιμη στο [0, 1] με
$F'(x) = f(x)g(x)$.
Όμως $g(x) > 0$ στο [0, 1] από υπόθεση
και αφού f γνησίως αύξουσα στο [0, 1] έχουμε: $x \geq 0 \Rightarrow$
$f(x) \geq f(0) > 0$, άρα $f(x) > 0$ στο [0, 1].
Συνεπώς $f(x) \cdot g(x) > 0$ στο [0, 1], έτσι
$F'(x) > 0$ στο [0, 1].
Οπότε F γνησίως αύξουσα στο [0, 1].
Επομένως για $x \in (0,\ 1]$ είναι $F(x) > F(0) \Rightarrow F(x) > F(0) = \int_0^0 f(t)g(t)dt = 0$

β. Είναι: $0 \leq t \leq x$ με $x \in (0,\ 1]$.
Αφού f γνησίως αύξουσα στο [0, 1] έχουμε $f(t) \leq f(x)$
δηλαδή $f(x) - f(t) \geq 0$ για $x \in (0,\ 1]$.

Ακόμη g(t) > 0 στο (0, 1].
άρα και $g(t)\cdot(f(x)-f(t))\geq 0$ με $x\in(0,1]$ και $t\in[0,x]$.
Η ισότητα ισχύει μόνο όταν t = x
Ακόμη η $g(t)\cdot(f(x)-f(t))$ συνεχής στο [0, x] με $x\in(0,1]$.
Άρα $\int_0^x g(t)(f(x)-f(t))\,dt>0$ με $x\in(0,1]$.
Επομένως για $x\in(0,1]$ έχουμε:

$$\int_0^x g(t)f(x)\,dt-\int_0^x f(t)g(t)\,dt>0$$

$$\Leftrightarrow f(x)\int_0^x g(t)\,dt>\int_0^x f(t)g(t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow f(x)G(x)>F(x)$$

γ. Είναι για $x\in(0,1]$: g(t) > 0 για $t\in[0,x]$.
Ακόμη g συνεχής στο [0, x] άρα $G(x)=\int_0^x g(t)\,dt>0$ για $x\in(0,1]$.
Έτσι η $H(x)=\dfrac{F(x)}{G(x)}$ ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη στο (0, 1] με

$$H'(x)=\frac{F'(x)-F(x)G'(x)}{G^2(x)}=\frac{f(x)g(x)G(x)-F(x)g(x)}{G^2(x)}=$$

$$=\frac{g(x)\big(f(x)G(x)-F(x)\big)}{G^2(x)}>0 \text{ στο } (0,1].$$

Άρα H γνησίως αύξουσα στο (0, 1]. Συνεπώς για $x\in(0,1]$ έχουμε:
$H(x)\leq H(1)$
δηλαδή $\dfrac{F(x)}{G(x)}\leq\dfrac{F(1)}{G(1)}$

δ. Θεωρούμε την $K(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)g(t)\,dt}{\int_0^x g(t)\,dt}\cdot\dfrac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2\,dt}{x^5}$ στο (0, 1].

- Αφού οι F, G παραγωγίσιμες στο [0, 1] είναι και συνεχείς σε αυτό άρα:

$$\lim_{x\to0^+}F(x)=F(0)=0$$

$$\lim_{x\to0^+}G(x)=G(0)=0$$

Συνεπώς:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x f(t)g(t)\,dt}{\int_0^x g(t)\,dt}=\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)}{G(x)}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L.H}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to0^+}f(x)=\overset{\text{f συνεχής}}{\underset{\text{στο } 0}{=}}f(0)\quad(1)$$

- Η φ(x) = ημt^2 συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα η $\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε και συνεχής σε αυτό.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt\right) = \int_0^0 \eta\mu t^2 dt = 0$

Ακόμη $\lim\limits_{x\to 0^+} x^5 = 0$

Συνεπώς

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt}{x^5} \underset{LH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt\right)'}{(x^5)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x^4 \cdot 2x}{5x^4} = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\eta\mu x^4}{x^4}\cdot\frac{2}{5}x\right]$$

$$= 1\cdot\frac{2}{5}\cdot 0 = 0 \quad (2)$$

Οπότε: $\lim\limits_{x\to 0^+} K(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}\right)\left(\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt}{x^5}\right) \underset{(2)}{\overset{(1)}{=}} f(0)\cdot 0 = 0$