

ΣΑΒΒΑΤΟ 27 ΜΑΪΟΥ 2006

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

- A.1 Θεωρία. Σχολ. βιβλίο σελ. 253
A.2 Ορισμός. Σχολ. βιβλίο σελ. 273

- B.
 $\alpha \rightarrow \Lambda$
 $\beta \rightarrow \Sigma$
 $\gamma \rightarrow \Sigma$
 $\delta \rightarrow \Lambda$
 $\epsilon \rightarrow \Sigma$

Θέμα 2ο

α. $f(x) = 2 + (x - 2)^2, \quad x \geq 2$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[2, +\infty)$ με $f'(x) = 2(x - 2) > 0$ για κάθε $x \in (2, +\infty)$. Άρα f γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$ και επομένως είναι και 1-1.

β. Αφού η f είναι 1-1 υπάρχει η f^{-1} αντίστροφη συνάρτηση της f με $f^{-1} : f(A) \rightarrow \mathbb{R}$.

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $A = [2, +\infty)$ έπεται ότι

$$f(A) = [f(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [2, +\infty)$$

$$\text{Τώρα αν } y = f(x) \Leftrightarrow y = 2 + (x - 2)^2 \Leftrightarrow y - 2 = (x - 2)^2.$$

Επειδή $x - 2 \geq 0, y - 2 \geq 0$, έχουμε $x - 2 = \sqrt{y - 2}, \quad x \in [2, +\infty), \quad y \in [2, +\infty)$

$$\text{ή } x = 2 + \sqrt{y - 2}, \quad x \in [2, +\infty), \quad y \in [2, +\infty)$$

$$\text{ή } f^{-1}(y) = 2 + \sqrt{y - 2}, \quad y \in [2, +\infty).$$

$$\text{Τελικά } f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x - 2}, \quad x \in [2, +\infty).$$

γ. i) Έχουμε

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 2 + (x-2)^2 \\ y = x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 + (x-2)^2 = x \\ y = x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x-2)^2 = x-2 \\ y = x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=2 \\ y=2 \end{array} \right\} \text{ ή } \left\{ \begin{array}{l} x=3 \\ y=3 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = f^{-1}(x) \\ y = x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 2 + \sqrt{x-2} \\ y = x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 2 + \sqrt{x-2} \\ y = x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 + \sqrt{x-2} = x \\ y = x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x-2} = x-2 \\ y = x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-2 = (x-2)^2 \\ y = x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=2 \\ y=2 \end{array} \right\} \text{ ή } \left\{ \begin{array}{l} x=3 \\ y=3 \end{array} \right\}$$

Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων f και f^{-1} με την $y = x$ είναι τα $A(2,2)$, $B(3,3)$.

ii)

Οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι συνεχείς άρα και η διαφορά τους είναι συνεχής.

$$f(x) - f^{-1}(x) = [2 + (x-2)^2] - [2 + \sqrt{x-2}] = (x-2)^2 - \sqrt{x-2} = \sqrt{x-2} \cdot (\sqrt{x-2}^3 - 1)$$

Προκύπτει

$$f(x) - f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 0 \text{ ή } (\sqrt{x-2})^3 = 1 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=3.$$

Δηλαδή τα κοινά τους σημεία είναι τα $A(2,2)$, $B(3,3)$.

$$\begin{aligned} \text{Επειδή } 2 \leq x \leq 3 &\Leftrightarrow 0 \leq x-2 \leq 1 \Leftrightarrow \\ \sqrt{x-2} \leq 1 &\Leftrightarrow \sqrt{x-2}^3 \leq 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x-2})^3 - 1 \leq 0. \end{aligned}$$

Επίσης είναι $\sqrt{x-2} \geq 0$ για $x \in [2,3]$.

Άρα $f(x) - f^{-1}(x) \leq 0$ για $x \in [2,3]$.

Οπότε το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου είναι

$$E = \int_2^3 (f^{-1}(x) - f(x)) dx = \int_2^3 (\sqrt{x-2} - (x-2)^2) dx = \frac{1}{3} \text{ τ.μ.}$$

Θέμα 3ο

α.1 Από τη σχέση $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ έχουμε ισοδύναμα $z_1 = -z_2 - z_3$ (1).

Θα δείξουμε ότι $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1|$ (2).

Πράγματι η (2) λόγω της (1) γράφεται ισοδύναμα:

ΦΡΟΝΙΜΟ

$$\begin{aligned}
|-z_2 - z_3 - z_2| &= |z_3 + z_2 + z_3| \Leftrightarrow \\
|2z_2 + z_3| &= |2z_3 + z_2| \Leftrightarrow \\
|2z_2 + z_3|^2 &= |2z_3 + z_2|^2 \Leftrightarrow \\
(2z_2 + z_3)(2\bar{z}_2 + \bar{z}_3) &= (2z_3 + z_2)(2\bar{z}_3 + \bar{z}_2) \Leftrightarrow \\
(2z_2 + z_3)(2\bar{z}_2 + \bar{z}_3) &= (2z_3 + z_2)(2\bar{z}_3 + \bar{z}_2) \Leftrightarrow \\
4z_2\bar{z}_2 + 2z_2\bar{z}_3 + 2z_3\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_3 &= 4z_3\bar{z}_3 + 2z_3\bar{z}_2 + 2z_2\bar{z}_3 + z_2\bar{z}_2 \Leftrightarrow \\
3z_2\bar{z}_2 &= 3z_3\bar{z}_3 \Leftrightarrow \\
z_2\bar{z}_2 &= z_3\bar{z}_3 \Leftrightarrow \\
|z_2|^2 &= |z_3|^2 \Leftrightarrow \\
|z_2| &= |z_3|.
\end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση είναι αληθής λόγω της υπόθεσης, άρα και η (2).

Με ανάλογο τρόπο δείχνουμε ότι $|z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$ (3).

Από τις (2) και (3) προκύπτει ότι $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3|$.

Άρα $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$.

α.ii Είναι:

$$|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2| = 1 + 1 = 2$$

Άρα $|z_1 - z_2| \leq 2$.

Οπότε $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$.

Τότε:

$$\begin{aligned}
|z_1 - z_2|^2 &\leq 4 \Leftrightarrow \\
(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) &\leq 4 \Leftrightarrow \\
(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) &\leq 4 \Leftrightarrow \\
z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 &\leq 4 \Leftrightarrow \\
|z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) &\leq 4 \Leftrightarrow \\
1 + 1 - (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) &\leq 4 \Leftrightarrow \\
z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 &\geq -2 \Leftrightarrow \\
z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} &\geq -2 \Leftrightarrow \\
2 \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) &\geq -2 \Leftrightarrow \\
\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) &\geq -1.
\end{aligned}$$

β. Επειδή $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ προκύπτει ότι οι εικόνες των μιγαδικών

$A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$ βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα

$\rho = 1$. Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο παραπάνω κύκλος.

Λόγω τώρα της σχέσης $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$ προκύπτει ότι οι

κορυφές $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$ αποτελούν κορυφές ισόπλευρου τριγώνου

εγγεγραμμένου στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο.

Θέμα 4ο

α. Πρέπει $x > 0$ και $x \neq 1$. Άρα $A_f = (0,1) \cup (1,+\infty)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο A_f ως διαφορά παραγωγίσιμων

συναρτήσεων, με $f'(x) = -\left[\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x}\right] < 0$ για κάθε $x \in A_f$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(0, 1)$ και $(1, +\infty)$.

Επειδή τώρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ και η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1)$ είναι $f((0,1)) = \mathbb{R}$.

Επίσης επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ και η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$, είναι $f((1,+\infty)) = \mathbb{R}$.

Έτσι συνολικά το σύνολο τιμών της f είναι $f((0,1) \cup (1,+\infty)) = \mathbb{R}$.

β. Επειδή $f((0,1)) = \mathbb{R}$ έπεται $0 \in f((0,1))$ δηλαδή υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ ώστε $f(x_1) = 0$.

Η ρίζα αυτή είναι μοναδική στο $(0,1)$, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα και άρα 1-1.

Ομοίως επειδή $f((1,+\infty)) = \mathbb{R}$ έπεται $0 \in f((1,+\infty))$ δηλαδή υπάρχει $x_2 \in (1,+\infty)$ ώστε $f(x_2) = 0$.

Η ρίζα αυτή είναι επίσης μοναδική στο $(1,+\infty)$, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα και άρα 1-1.

Έτσι η f έχει ακριβώς 2 ρίζες.

γ. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $g(x) = \ln x$ στο σημείο $A(\alpha, \ln \alpha)$, $\alpha > 0$ είναι:

$$y = \frac{1}{\alpha}x - 1 + \ln \alpha \quad (\varepsilon_1)$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x) = e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$ είναι:

$$y = e^\beta x + e^\beta - \beta e^\beta \quad (\varepsilon_2)$$

Οι (ε_1) , (ε_2) ταυτίζονται αν και μόνο αν

$$\frac{1}{\alpha} = e^\beta \Leftrightarrow \beta = -\ln \alpha \quad (1) \text{ και } \ln \alpha - 1 = e^\beta - \beta \cdot e^\beta \quad (2)$$

Τότε η (2) γράφεται:

$$\ln \alpha - 1 = \frac{1}{\alpha} + \ln \alpha \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\alpha \ln \alpha - \alpha = 1 + \ln \alpha \Leftrightarrow$$

$$-\alpha - 1 = (\ln \alpha)(1 - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} = \ln \alpha \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} - \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$$

δ.

Από το 4γ προκύπτει ότι οι γραφικές παραστάσεις των $g(x)$, $h(x)$ έχουν κοινή εφαπτόμενη στα σημεία τους $A(\alpha, \ln \alpha)$ και $B(\beta, e^\beta)$ αντίστοιχα αν και μόνον αν $\begin{cases} \beta = -\ln \alpha \\ f(\alpha) = 0 \end{cases}$

Επειδή η $f(x) = 0$ έχει δύο διακεκριμένες ρίζες $\alpha_1 \in (0, 1)$ και $\alpha_2 \in (1, +\infty)$ προκύπτουν δύο εφαπτόμενες οι

$$(\varepsilon_1): y = \frac{1}{\alpha_1}x - 1 + \ln \alpha_1$$

$$(\varepsilon_2): y = \frac{1}{\alpha_2}x - 1 + \ln \alpha_2.$$

Οι εφαπτόμενες αυτές είναι ακριβώς δύο (διακεκριμένες) αφού έχουν δύο διακεκριμένους συντελεστές διεύθυνσης $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}$ αντίστοιχα.

$$\left(\frac{1}{\alpha_1} \in (1, +\infty), \frac{1}{\alpha_2} \in (0, 1) \right).$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Γ. ΠΑΝΣΙΑΚΗ
ΠΕΙΡΑΙΑΣ