31 ΜΑΪΟΥ 2005

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών (σχολ. βιβλίο σελ. 194).

Α.2. Η ευθεία y = λx + β λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο +∞, αν $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0$.

Β.
α → Λ, β → Λ, γ → Σ, δ → Σ ε → Λ, ΣΤ → Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α. Από τη σχέση $|z_1|=|z_2|=|z_3|=3$ έχουμε:

$$|z_1|=3 \Leftrightarrow |z_1|^2=9 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1=9 \Leftrightarrow \bar{z}_1=\frac{9}{z_1}.$$

β. Αρκεί (*) να δειχθεί ότι:

$$\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}\right)} \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}+\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}.$$

Όμως $\bar{z}_1=\frac{9}{z_1}$, $\bar{z}_2=\frac{9}{z_2}$, $\bar{z}_3=\frac{9}{z_3}$ αφού $|z_1|=|z_2|=|z_3|=3$.

Άρα $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}+\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}=\frac{\frac{9}{z_1}}{\frac{9}{z_2}}+\frac{\frac{9}{z_2}}{\frac{9}{z_1}}=\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_1}{z_2}$.

* Ισχύει ότι $z=\bar{z} \Leftrightarrow z\in \mathrm{IR}$
γιατί αν z = α + βi τότε $\bar{z}=\alpha-\beta i$ άρα $z-\bar{z}=2\beta i \quad (1)$.

Έτσι $z=\bar{z} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \beta=0 \Leftrightarrow z\in \mathrm{IR}$

γ. α' τρόπος

Είναι:

$$|z_1+z_2+z_3|=|\overline{z_1+z_2+z_3}|=|\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}|=\left|\frac{9}{z_1}+\frac{9}{z_2}+\frac{9}{z_3}\right|=9\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|=9\left|\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1z_2z_3}\right|=$$

$$=9\frac{|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|}{|z_1||z_2||z_3|}=9\frac{|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|}{27}=\frac{1}{3}|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|.$$

β' τρόπος

Είναι:

$$|z_1+z_2+z_3|^2=\frac{1}{9}|z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1|^2 \Leftrightarrow$$

$$(z_1+z_2+z_3)\overline{(z_1+z_2+z_3)}=\frac{1}{9}(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)\overline{(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)}$$

$$(z_1+z_2+z_3)(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3})=\frac{1}{9}(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)(\overline{z_1}\,\overline{z_2}+\overline{z_2}\,\overline{z_3}+\overline{z_3}\,\overline{z_1})$$

$$(z_1+z_2+z_3)\left(\frac{9}{z_1}+\frac{9}{z_2}+\frac{9}{z_3}\right)=\frac{1}{9}(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)\left(\frac{81}{z_1z_2}+\frac{81}{z_2z_3}+\frac{81}{z_3z_1}\right)$$

$$9(z_1+z_2+z_3)\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right)=\frac{81}{9}(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)\left(\frac{1}{z_1z_2}+\frac{1}{z_2z_3}+\frac{1}{z_3z_1}\right)$$

$$\left(1+\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_2}{z_1}+1+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}+\frac{z_3}{z_2}+1\right)=\left(1+\frac{z_1z_2}{z_2z_3}+\frac{z_1z_2}{z_3z_1}+\frac{z_2z_3}{z_1z_2}+1+\frac{z_2z_3}{z_3z_1}+\frac{z_3z_1}{z_1z_2}+\frac{z_3z_1}{z_2z_3}+1\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}+\frac{z_3}{z_2}=\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}+\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_3}{z_2}+\frac{z_1}{z_2}.$$

Η τελευταία ισχύει προφανώς, άρα και η αρχική.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων σ' αυτό, με $f'(x) = (e^{\lambda x})' = e^{\lambda x}\cdot(\lambda x)' = \lambda e^{\lambda x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $\lambda > 0$, $e^{\lambda x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β. Έστω $(x_0, f(x_0))$ οι συντεταγμένες του σημείου Μ. Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο Μ είναι

(ε): $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - e^{\lambda x_0} = \lambda e^{\lambda x_0}(x - x_0)$.

Για να διέρχεται η (ε) από την αρχή των αξόνων πρέπει και αρκεί:

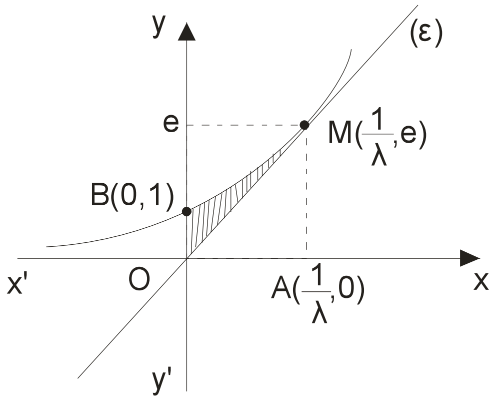
$$0 - e^{\lambda x_0} = \lambda e^{\lambda x_0}(0 - x_0) \Leftrightarrow -1 = \lambda(-x_0) \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{\lambda}.$$

Έτσι η (ε) γίνεται:

$y - e = \lambda e(x - \frac{1}{\lambda}) \Leftrightarrow y = \lambda e x$.

Οι συντεταγμένες του Μ είναι: $M(\frac{1}{\lambda}, e)$.

γ.



Το ζητούμενο εμβαδόν όπως φαίνεται από το σχήμα ισούται με:

$$(OAMB) - (OAM) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} e^{\lambda x} dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot e = \left[\frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}} - \frac{e}{2\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot e - \frac{1}{\lambda} - \frac{e}{2\lambda} = \frac{2e - 2 - e}{2\lambda} = \frac{e-2}{2\lambda}.$$

δ. Είναι $\dfrac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda} = \dfrac{\lambda^2 \cdot \dfrac{e-2}{2\lambda}}{2 + \eta\mu\lambda} = \dfrac{(e-2)\lambda}{2(2+\eta\mu\lambda)} = \dfrac{e-2}{2} \cdot \dfrac{1}{\dfrac{2+\eta\mu\lambda}{\lambda}}$.

Για κάθε $\lambda > 0$ είναι:

$-1 \le \eta\mu\lambda \le 1 \Leftrightarrow 1 \le 2 + \eta\mu\lambda \le 3 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{\lambda} \le \frac{2+\eta\mu\lambda}{\lambda} \le \frac{3}{\lambda}$.

Όμως $\lim\limits_{\lambda \to +\infty}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \lim\limits_{\lambda \to +\infty}\left(\frac{3}{\lambda}\right) = 0$, οπότε με βάση το κριτήριο παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{2+\eta\mu\lambda}{\lambda} = 0$, ενώ $\frac{2+\eta\mu\lambda}{\lambda} > 0$.

Έτσι $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{1}{\dfrac{2+\eta\mu\lambda}{\lambda}} = +\infty$ και αφού $\frac{e-2}{2} > 0$ προκύπτει τελικά ότι

$\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda} = +\infty$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Από τη δοσμένη σχέση $2f'(x) = e^{x - f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$2f'(x) = \dfrac{e^x}{e^{f(x)}}$ ή

$$2f'(x)e^{f(x)} = e^x \quad \text{ή}$$

$$f'(x)e^{f(x)} = \frac{1}{2}e^x \quad \text{ή}$$

$$\left(e^{f(x)}\right)' = \frac{1}{2}e^x \quad \text{ή}$$

$$\left(e^{f(x)}\right)' = \left(\frac{e^x}{2}\right)' \quad \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} + C\,,\ C \in \mathbb{R}\,.$$

Για $x = 0$ έχουμε: $e^{f(0)} = \dfrac{e^0}{2} + C$

η οποία λόγω του ότι f(0) = 0 γράφεται:

$$e^0 = \frac{e^0}{2} + C \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2} + C \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}.$$

Οπότε: $e^{f(x)} = \dfrac{e^x}{2} + \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow e^{f(x)} = \dfrac{e^x + 1}{2}$.

Άρα: $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x + 1}{2}\right)$.

β. Θέτουμε x − t = u.
Διαφορίζουμε την τελευταία και βρίσκουμε du = −dt.
Επιπλέον για t = 0 είναι u = x, ενώ για t = x είναι u = 0.
Έτσι:

$$\int_0^x f(x-t)dt = -\int_x^0 f(u)du = \int_0^x f(u)du$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{\eta\mu x}\,.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η $\int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\left(\int_0^x f(u)du\right)' = f(x).$$

Επειδή η $\int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ θα είναι και συνεχής σ' αυτό.

Επομένως: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)du}{\eta\mu x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x f(u)du\right)'}{(\eta\mu x)'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x} = \dfrac{f(0)}{\sigma\upsilon\nu 0} = f(0) = 0$.

(Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και συνεχής σ' αυτό.)

γ. Είναι

$$h(x) = \int_{-x}^{x} t^{2005}f(t)dt = \int_{-x}^{0} t^{2005}f(t)dt + \int_{0}^{x} t^{2005}f(t)dt = \int_{0}^{x} t^{2005}f(t)dt - \int_{0}^{-x} t^{2005}f(t)dt.$$

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $\varphi(t) = t^{2005}\cdot f(t)$ η $h(x)$ γράφεται:

$$h(x) = \int_0^x \varphi(t)dt - \int_0^{-x}\varphi(t)dt.$$

Η $\varphi(t) = t^{2005}\cdot f(t)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα η συνάρτηση $\kappa(x) = \int_0^x \varphi(t)dt$

είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\kappa'(x) = \varphi(x) = x^{2005}\cdot f(x)$, όπως επίσης είναι

παραγωγίσιμη και η συνάρτηση $\kappa(-x) = \int_0^{-x}\varphi(t)dt$ ως σύνθεση των

παραγωγισίμων $-x$, $\kappa(x)$, με $(\kappa(-x))' = \varphi(-x)(-x)' = -\varphi(-x)$.

Επομένως

$h'(x) = (\kappa(x) - \kappa(-x))' = \varphi(x) - \varphi(-x) = x^{2005}f(x) - (-x)^{2005}f(-x) =$

$$= x^{2005}\cdot\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) - x^{2005}\cdot\ln\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right) = x^{2005}\cdot\ln\left(\frac{\frac{1+e^x}{2}}{\frac{1+e^{-x}}{2}}\right) = x^{2005}\cdot\ln\left(\frac{1+e^x}{1+e^{-x}}\right) =$$

$$= x^{2005}\cdot\ln\left(\frac{1+e^x}{1+\frac{1}{e^x}}\right) = x^{2005}\cdot\ln\left[\frac{e^x(1+e^x)}{(e^x+1)}\right] = x^{2005}\cdot\ln e^x = x^{2005}\cdot x = x^{2006}.$$

Ακόμα η $g(x) = \dfrac{x^{2007}}{2007}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = 2007\cdot\dfrac{x^{2006}}{2007} = x^{2006}$.

Επειδή $h'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h(x) = g(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Όμως για $x = 0$ είναι $h(0) = g(0) = 0$, άρα $c = 0$.

Επομένως $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ. Η εξίσωση $\int_{-x}^{x} t^{2005} f(t)dt = \frac{1}{2008}$ λόγω του ερωτήματος γ γράφεται

ισοδύναμα $\frac{x^{2007}}{2007} = \frac{1}{2008} \Leftrightarrow 2008x^{2007} - 2007 = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση
$P(x) = 2008x^{2007} - 2007$, $x \in [0, 1]$.

· Η P είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο [0, 1] ως πολυωνυμική.

· $P(0) = -2007 < 0$ κ'

· $P(1) = 1 > 0$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $P(x_0) = 0$.

Επιπλέον η $P(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, άρα και στο [0, 1] με $P'(x) = 2008 \cdot 2007x^{2006}$.

Είναι $P'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ οπότε η P είναι γνησίως αύξουσα στο (0, 1).

Άρα η $P(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο (0, 1).