ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$ **Μονάδες 10**

Β. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; **Μονάδες 5**

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους. **Μονάδες 2**

β. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$ **Μονάδες 2**

γ. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g'(x_0)$ **Μονάδες 2**

δ. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ. **Μονάδες 2**

ε. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε: $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$ **Μονάδες 2**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2 \ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα. **Μονάδες 10**

β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής. **Μονάδες 8**

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^x f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R και $f(0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi \in (0, \frac{3}{2})$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -f(\xi)$. **Μονάδες 8**

β. Εάν $f(x)=2x^2-3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$I(\alpha) = \int_\alpha^0 g(x)\,dx, \qquad \alpha \in R$ **Μονάδες 8**

γ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\alpha\to -\infty} I(\alpha)$ **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση f: $R \to R$ τέτοια ώστε $f(1)=1$. Αν για κάθε $x \in R$, ισχύει

$g(x) = \int_1^{x^3} |z| f(t)dt - 3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1) \geq 0$, όπου $z=\alpha+\beta i \in C$, με $\alpha, \beta \in R^*$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R και να βρείτε τη g΄ **Μονάδες 5**

β. Να αποδείξετε ότι $|z| = \left|z+\frac{1}{z}\right|$ **Μονάδες 8**

γ. Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος **β** να αποδείξετε ότι $Re(z^2) = -\frac{1}{2}$ **Μονάδες 6**

δ. Αν επιπλέον $f(2)=\alpha>0$, $f(3)=\beta$ και $\alpha>\beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$. **Μονάδες 6**