ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 260
Β. Σχολικό βιβλίο σελίδα 213
Γ. α. Σ, β. Σ, γ. Λ, δ. Λ, ε. Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α. Πρέπει $x > 0$

Άρα $D_f = (0\ ,+\infty)$

$$f'(x) = (x^2\ \ell n x)' = (x^2)' \cdot \ell n x + x^2 (\ell n x)'$$

$$= 2x\ \ell n x + x^2 \frac{1}{x} = 2x\ \ell n x + x = x(2\ell n x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2\ell n x + 1) = 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2\ell n x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell n x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f (x)		$\searrow$		$\nearrow$	

Ολ. Ελάχιστο

Αφου $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x(2\ell n x + 1) > 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2\ell n x + 1 > 0$

$\Leftrightarrow \ell n x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x > e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt{e}}$ Δηλαδή η συνάρτηση έχει στο $x_o = \frac{1}{\sqrt{e}}$, ολικό ελάχιστο το:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \ell n\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ell n e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e}$$

β. $f''(x) = \left[x(2\ell n x + 1)\right]' = (x)' \cdot (2\ell n x + 1) + x(2\ell n x + 1)'$

$$= 2\ell n x + 1 + x\frac{2}{x} = 2\ell n x + 3$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ell n x + 3 = 0 \Leftrightarrow \ell n x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{3}{2}}\ x = \frac{1}{e\sqrt{e}}$$

x	0		$\frac{1}{e\sqrt{e}}$		$+\infty$
f''(x)		-	0	+	
f (x)		$\frown$		$\smile$	

Σ.Κ.

Αφου $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2\ell n x + 3 > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ell n x > -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \ell n x > \ln e^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x > e^{-\frac{3}{2}} \quad x > \frac{1}{e\sqrt{e}}$$

$$f\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{e\sqrt{e}}\right)^2 \ell n\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{e^3} \cdot \ell n e^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{e^3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2e^3}$$

άρα έχει σημείο καμπής το Α $\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}, -\frac{3}{2e^3}\right)$

γ. ◆Στο διάστημα $\boldsymbol{\Delta_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]}$

η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 \ell n x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ell n x}{\frac{1}{x^2}} \underset{\text{L'Hospital}}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{-2} = 0$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$$

Άρα $f(\Delta_1) = \left[-\frac{1}{2e}, 0\right)$

◆ Στο διάστημα $\boldsymbol{\Delta_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)}$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα

$$\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^2 \ell n x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot \lim_{x \to +\infty} \ell n x = +\infty}$$

$$\boldsymbol{f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}}$$

Άρα $\boldsymbol{f(\Delta_2) = \left[-\frac{1}{2e}, +\infty\right)}$

Επομένως $\boldsymbol{f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = \left[-\frac{1}{2e}, +\infty\right)}$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $g'(x) = (e^x \cdot f(x))' = (e^x)' \cdot f(x) + e^x \cdot f'(x) = e^x (f(x) + f'(x))$

Η g είναι συνεχής στο [0 , 3/2]

Η g είναι παραγωγίσιμη στο (0 , 3/2)

g (0) = g (3/2) = 0

Από Θ. Rolle προκύπτει ότι

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\boldsymbol{\xi \in \left(0, \frac{3}{2}\right)}$ τέτοιο ώστε

$g'(\xi) = 0$ ή $e^{\xi} (f(\xi) + f'(\xi)) = 0$ ή $f(\xi) + f'(\xi) = 0$ ή $f'(\xi) = -f(\xi)$

β. $I(\alpha)=\int_{\alpha}^{0} g(x)\,dx = \int_{\alpha}^{0} e^{x}\cdot f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{0} e^{x}\cdot(2x^2-3x)\,dx$

$$= \int_{\alpha}^{0}\left(e^{x}\right)'\cdot(2x^2-3x)\,dx = \left[e^{x}\cdot(2x^2-3x)\right]_{\alpha}^{0} - \int_{\alpha}^{0} e^{x}\cdot(2x^2-3x)'\,dx$$

$$= 0 - e^{\alpha}\cdot(2\alpha^2-3\alpha) - \int_{\alpha}^{0} e^{x}\cdot(4x-3)\,dx \quad (1)$$

$$\int_{\alpha}^{0} e^{x}\cdot(4x-3)\,dx = \int_{\alpha}^{0}\left(e^{x}\right)'\cdot(4x-3)\,dx = \left[e^{x}\cdot(4x-3)\right]_{\alpha}^{0} - \int_{\alpha}^{0} e^{x}\cdot(4x-3)'\,dx$$

$$= -3 - e^{\alpha}\cdot(4\alpha-3) - \int_{\alpha}^{0} 4e^{x}\,dx = -3 - e^{\alpha}\cdot(4\alpha-3) - 4\left[e^{x}\right]_{\alpha}^{0}$$

$$= -3 - e^{\alpha}\cdot(4\alpha-3) - 4 + 4e^{\alpha} \quad (2)$$

$$I(\alpha) = -e^{\alpha}\cdot(2\alpha^2-3\alpha) + 3 + e^{\alpha}\cdot(4\alpha-3) + 4 - 4e^{\alpha} =$$

$$= e^{\alpha}\cdot(-2\alpha^2+3\alpha+4\alpha-3-4) + 4 + 3$$

$$= e^{\alpha}\cdot(-2\alpha^2+7\alpha-7) + 7$$

γ. Από (1) και (2) έχουμε :

$$\lim_{\alpha\to-\infty}\left[e^{\alpha}\cdot(-2\alpha^2+7\alpha-7)\right]$$

$$= \lim_{\alpha\to-\infty}\frac{-2\alpha^2+7\alpha-7}{e^{-\alpha}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{\text{L' Hospital}}{=}}$$

$$= \lim_{\alpha\to-\infty}\frac{-4\alpha+7}{-e^{-\alpha}} \overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{\underset{\text{L' Hospital}}{=}}$$

$$= \lim_{\alpha\to-\infty}\frac{-4}{e^{-\alpha}} = 0$$

Άρα $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} I(\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to-\infty}\left[e^{\alpha}\cdot(-2\alpha^2+7\alpha-7)\right] + \lim\limits_{\alpha\to-\infty} 7 = 0+7=7$

ΘΕΜΑ 4^{o}

α. $g(x)=\int_{1}^{x^3}|z|\,f(t)\,dt - 3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1)$ ή

$g(x)=|z|\cdot\int_{1}^{x^3} f(t)\,dt - 3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1)$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο IR

Η $h(x)=|z|\cdot\int_{1}^{x} f(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη στο IR

Η $t(x)=x^3$ είναι παραγωγίσιμη στο IR

Η $\varphi(x)=|z|\cdot\int_{1}^{x^3} f(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη στο IR ως σύνθεση των h και t

Η $s(x)=3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1)$ είναι παραγωγίσιμη στο IR ως πολυωνυμική

Άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο IR ως διαφορά των παραγωγίσιμων φ και s.

$$g'(x)=\left[|z|\cdot\int_{1}^{x^3} f(t)\,dt - 3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1)\right]'$$

$$=|z|\cdot\left[\int_{1}^{x^3} f(t)\,dt\right]' - 3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1)'$$

$$=|z|\cdot f(x^3)\cdot(x^3)' - 3\left|z+\frac{1}{z}\right|$$

$$=3\cdot|z|\cdot x^2 f(x^3) - 3\left|z+\frac{1}{z}\right|$$

β. Παρατηρούμε ότι

$$g(x) = \int_1^{x^3} |z| f(t)\,dt - 3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1) \geq 0 = g(1), \text{ για κάθε } x \in IR$$

Άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο του Π.Ο.
$x_0 = 1$, παραγωγίζεται σ' αυτό και επειδή ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Fermat προκύπτει ότι $g'(1) = 0$.

$$g'(1) = 0 \text{ ή } 3\cdot|z|\cdot f(1) - 3\left|z+\frac{1}{z}\right| = 0 \overset{f(1)=1}{\Leftrightarrow}$$

$$3\cdot|z| - 3\left|z+\frac{1}{z}\right| = 0 \text{ ή } |z| = \left|z+\frac{1}{z}\right|$$

$$|z| = \left|z+\frac{1}{z}\right| \Leftrightarrow |z|^2 = \left|z+\frac{1}{z}\right|^2 \Leftrightarrow z\bar{z} = \left(z+\frac{1}{z}\right)\left(\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}\right) \Leftrightarrow$$

γ. α' τρόπος

$$z\bar{z} = z\bar{z} + \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} + \frac{1}{z\bar{z}} \Leftrightarrow 0 = \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} + \frac{1}{z\bar{z}} \Leftrightarrow z^2 + \bar{z}^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$z^2 + \bar{z}^2 = -1 \Leftrightarrow z^2 + \overline{z^2} = -1$$

$2\,\mathrm{Re}(z^2) = -1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z^2) = -½$

β΄ τρόπος

$z^2 = (\alpha+\beta i)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta i - \beta^2 = (\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha\beta i$

$(\alpha+\beta i)^2 + (\alpha-\beta i)^2 = -1 \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta i - \beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta i - \beta^2 = -1$

$\Leftrightarrow 2(\alpha^2 - \beta^2) = -1 \Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 = -½ \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z^2) = -½$

δ. Θα δείξουμε ότι $\beta < 0$

$\alpha^2 - \beta^2 = -½ < 0$ ή

$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) < 0$, με $\alpha - \beta > 0$ διότι $\alpha > \beta$

Άρα $\alpha + \beta < 0 \Leftrightarrow \beta < -\alpha < 0$

Η f είναι συνεχής στο $[2, 3]$

$f(2) = \alpha > 0$

$f(3) = \beta < 0$, άρα $f(2)\,f(3) < 0$

Από Θ. Bolzano για την f στο διάστημα $[2, 3]$

προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (2, 3)$,

τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.