ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΕΕ

ΘΕΜΑ 1ο

α)

Αριθμός παιδιών	Συχνότητα ν_i	Αθροιστική Συχνότητα	Σχ. Συχνότητα (%) f_i
0	4	4	16
1	7	11	28
2	5	16	20
3	4	20	16
4	3	23	12
5	2	25	8
Αθροίσματα	25		100

β) Η επικρατούσα τιμή είναι 1 αφού έχει τη μεγαλύτερη συχνότητα.

γ) Αφού το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 25 διάμεσος είναι η 13η παρατήρηση δηλ. η 2.

δ) Τρία παιδιά έχουν 16% των οικογενειών.

ε) Μέχρι και δύο παιδιά έχουν 4+7+5=16 οικογένειες.

ΘΕΜΑ 2ο

α) Έχουμε:

$$\lim_{x\to 9^+} f(x) = \lim_{x\to 9^+} \frac{2x-18}{\sqrt{3}-3} = \lim_{x\to 9^+} \frac{(2x-18)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 9^+} \frac{2(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x})^2-3^2} = \lim_{x\to 9^+} \frac{2(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9} = \lim_{x\to 9^+} 2\cdot(\sqrt{x}+3) =$$

$$= 2(\sqrt{9}+9) = 2(3+3) = 12$$

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 9^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 9^-} (\lambda x+3) = 9\lambda + 3$.

γ) Η f είναι συνεχής στο $x_0=9$ αν και μόνο άν

$$\lim_{x\to 9^-} f(x) = \lim_{x\to 9^+} f(x) = f(9)$$

δηλαδή

9λ+3=12=9λ+3 ή 9λ+3=12 ή 9λ=9.

Άρα λ=1.

ΘΕΜΑ 3ο

α) Η συνάρτηση f ως πολυωνυμική είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σ' όλο το R, με παράγωγο

$f'(x)=(2x^3-9x^2+αx+β)'=6x^2-18x+α$.

β)

- Επειδή $f'(1)=0$, έχουμε

  $6\cdot1^2-18\cdot1+α=0$ ή $6-18+α=0$ ή $α=18-6$.

  Άρα $α=12$.

Για την τιμή $α=12$ ο τύπος της f γράφεται:

  $f(x)=2x^3-9x^2+12x+β$

- Επειδή τώρα είναι $f(2)=5$, έχουμε

$2\cdot2^3-9\cdot2^2+12\cdot2+β=5$ ή $16-36+24+β=5$ ή $β=5-16+36-24$

Άρα $β=1$.

γ) Για τις τιμές $α=12$ και $β=1$ ο τύπος της f(x) γράφεται

$f(x)=2x^3-9x^2-12x+1$.

Οπότε

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x^2-3x+2)=6(x-1)(x-2)$.

Από την εξίσωση $f'(x)=0$ έχουμε $6(x-1)(x-2)=0$

Άρα $x=1$ ή $x=2$

Κατασκευάζουμε πίνακα μεταβολών

x	**-∞**		**1**		**2**		**+∞**
f΄(x)		**+**	0	**-**	0	**+**	
f(x)		↗		↘		↗	

Επομένως η f είναι
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 2]$
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2,+\infty)$.

ΘΕΜΑ 4ο

α) Αφού το άθροισμα του μήκους και του πλάτους του οικοπέδου είναι 200 μέτρα και με δεδομένο ότι το μήκος είναι x μέτρα, προκύπτει ότι το πλάτος θα ήταν (200 - x) μέτρα. Επομένως, το εμβαδόν θα είναι:

$$E(x) = x\,(200 - x) = -x^2 + 200x\ .$$

β) Παραγωγίζοντας την E(x) έχουμε:
$E'(x) = -2x + 200 = -2\,(x - 100),\quad 0 < x < 200$.
Είναι:

$$E'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 100$$
$$E'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < 100$$
$$E'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 100 < 200$$

Η E(x) επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο (0,100] και γνησίως φθίνουσα στο [100,200). Άρα γίνεται μέγιστη όταν x=100 μέτρα.

γ) Η μέγιστη τιμή του E(x) είναι:

$$E(100) = -100^2 + 200 \cdot 100 = 20000 - 10000 = 10000 \text{ τ.μ.}$$