<u>Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Θετικής Κατεύθυνσης</u>

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ</u>

<u>ΘΕΜΑ 1^o</u>

α. Θεωρία: Θεώρημα σελ. 217 σχολικού βιβλίου

β. Θεωρία: Η απάντηση βρίσκεται στη σελ. 247 του σχολικού βιβλίου

γ. α-Σ, β-Σ, γ-Σ, δ-Λ, ε-Λ

<u>ΘΕΜΑ 2^o</u>

α. Είναι:

$$w = 3z - i\bar{z} + 4 = 3(\alpha + \beta i) - i(\alpha - \beta i) + 4 = 3\alpha + 3\beta i - \alpha i - \beta + 4 = (3\alpha - \beta + 4) + (3\beta - \alpha)i$$

Έτσι Re(w)=3α-β+4 και Im(w)=3β-4.

β. Οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο είναι τα σημεία M(3α-β+4, 3β-α), όπου α, β $\in \Re$.

Αφού ανήκουν σε ευθεία με εξίσωση y=x-12 είναι:

3β-α=3α-β+4-12 $\Leftrightarrow$ 4β-4α=-8 $\Leftrightarrow$ β-α=-2 $\Leftrightarrow$ β=α-2.

Από την τελευταία συνάγεται ότι τα σημεία N(α,β) που είναι οι εικόνες του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν στην ευθεία με εξίσωση y=x-2.

γ. Από τις εικόνες των μιγαδικών αριθμών, των οποίων οι εικόνες κινούνται στην ευθεία (ε): y=x-2, ελάχιστο μέτρο έχει εκείνος του οποίου η εικόνα K είναι τέτοια ώστε OK κάθετη στην (ε). Έτσι:

$$\lambda_{OK}=-1 \text{ και } OK: y=-x$$

Λύνοντας το σύστημα:

$$y=x-2,\ y=-x$$

προκύπτει x=1, y=-1. Δηλαδή το σημείο K έχει συντεταγμένες (1,-1). Άρα ο μιγαδικός με το ελάχιστο μέτρο από αυτούς που κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y=x-2 είναι ο z=1-i.

<u>ΘΕΜΑ 3^o</u>

α. Η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+x$ είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη 2 φορές σε όλο το $\Re$ με:

$f'(x) = (x^5+x^3+x)' = 5x^4+3x^2+1$ και

$f''(x) = (5x^4+3x^2+1)' = 20x^3+6x$

- Επειδή είναι $f'(x) = 5x^4+3x^2+1 > 0$ για κάθε $x \in \Re$, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\Re$.
- $f''(x)=0 \Leftrightarrow 20x^3+6x=0 \Leftrightarrow 2x(10x^2+3)=0 \Leftrightarrow x=0$ εφόσον $10x^2+3>0$ για κάθε $x \in \Re$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f″	-	0	+
f	$\cap$		$\cup$

  Επομένως η f είναι:
  - κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και
  - κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$.
- Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\Re$ θα είναι 1-1 σε αυτό και συνεπώς η f είναι αντιστρέψιμη στο $\Re$.

β. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$ (ερώτημα α). Προκειμένου να δείξουμε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε $x \in \Re$, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$e^x \geq 1+x \text{ για κάθε } x \in \mathfrak{R}.$$

Πράγματι, θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x-1-x$ στο $\mathfrak{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη σ᾽ αυτό με $g'(x)=e^x-1$. Από την εξίσωση $g'(x)=0$ έχουμε $e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$.

Έχουμε:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g΄	-	0	+
g	**γν.φθίνουσα**		**γν.αύξουσα**

ελάχ. $g(0)=0$

Επομένως $g(x) \geq g(0)=0$ για κάθε $x \in \mathfrak{R}$ ή $e^x-1-x \geq 0$ για κάθε $x \in \mathfrak{R}$ και άρα:

$$e^x \geq 1+x \text{ για κάθε } x \in \mathfrak{R}$$

γ. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο (0,0) έχει εξίσωση

$y-f(0) = f'(0)\,(x-0)$ ή $y-0 = 1(x-0)$ ή $\boxed{y=x}$

που είναι η διχοτόμος της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων. Επειδή τώρα η f είναι αντιστρέψιμη (ερώτημα α) προκύπτει ότι υπάρχει η f^{-1} ή οποία (λόγω πρότασης σελ. 155 σχολ. βιβλ.) έχει $C_{f^{-1}}$ συμμετρική την C_f ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία y=x

δ. Για κάθε $x \in [0,3]$ είναι: $x \geq 0$ και επειδή η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό (*), θα είναι $f^{-1}(x) \geq f^{-1}(0) \Leftrightarrow f^{-1}(x) \geq 0$. (αφού $f^{-1}(0)=0$ **)

Έτσι το εμβαδό του ζητουμένου χωρίου ισούται με: $E=\int_0^3 f^{-1}(y)dy$.

Θέτουμε $f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow y=f(x)$. (1)

Διαφορίζοντας την (1) λαμβάνουμε: $dy=d[f(x)]=f'(x)dx$ και

$y\big|_0^3 \to x\big|_{f(x)=0}^{f(x)=3} \to x\big|_{x^5+x^3+x=0}^{x^5+x^3+x=3} \to x\big|_0^1$ (***), άρα

$$E=\int_0^1 x\cdot f'(x)dx=\int_0^1 x(x^5+x^3+x)'dx=\int_0^1 (5x^5+3x^3+x)dx=5\int_0^1 x^5dx+3\int_0^1 x^3dx+\int_0^1 xdx=$$

$$=5\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1+3\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=5\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{25}{12}\text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 4^o

α. Αφού η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα με άκρα γ, δ και $f(\gamma)\cdot f(\delta)<0$, εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano από το οποίο συνάγεται ότι υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα x_0 που ανήκει στο ανοιχτό διάστημα με άκρα γ, δ ώστε $f(x_0)=0$.

β. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\gamma<\delta$ και $f(\gamma)>0$, $f(\delta)<0$, οπότε $\alpha<\gamma<x_0<\delta<\beta$.

i) Στο διάστημα [α,γ] είναι:

$f(\alpha)=0$, $f(\gamma)>0$, άρα $f(\alpha)<f(\gamma)$ και επειδή

είναι $\alpha<\gamma$ συνάγεται ότι:

$$\frac{f(\alpha)-f(\gamma)}{\alpha-\gamma}>0 \quad (1)$$

Όμως από το θεώρημα μέσης τιμής (ΘΜΤ) για την f στο διάστημα [α,γ], υπάρχει $\kappa_1 \in (\alpha,\gamma)$ ώστε $f'(\kappa_1)=\dfrac{f(\alpha)-f(\gamma)}{\alpha-\gamma}$ και λόγω της (1) $f'(\kappa_1)>0$.

ii) Εργαζόμενοι ομοίως, στο διάστημα $[\gamma,x_0]$ έχουμε:

$f(\gamma)>0$, $f(x_0)=0$ άρα $f(\gamma)>f(x_0)$ και επειδή είναι $\gamma<x_0$ συνάγεται:

$$\frac{f(\gamma)-f(x_0)}{\gamma-x_0}<0 \quad (2)$$

Από το ΘΜΤ για την f στο διάστημα $[\gamma,x_0]$ έχουμε ότι υπάρχει $\kappa_2 \in (\gamma,x_0)$ ώστε

$$f'(\kappa_2)=\frac{f(\gamma)-f(x_0)}{\gamma-x_0}$$

και λόγω της (2) είναι $f'(\kappa_2)<0$.

iii) Για το διάστημα $[x_0, \delta]$ όμοια έχουμε ότι υπάρχει $\kappa_3 \in (x_0,\delta)$ ώστε

$$\frac{f(\delta)-f(x_0)}{\delta-x_0}=f'(\kappa_3)<0$$

iv) Για το διάστημα $[\delta,\beta]$ όμοια έχουμε ότι υπάρχει $\kappa_4 \in (\delta,\beta)$ ώστε

$$\frac{f(\beta)-f(\delta)}{\beta-\delta}=f'(\kappa_4)>0$$

v) Είναι $f'(\kappa_1)>0$, $f'(\kappa_2)<0$ άρα $f'(\kappa_1)>f'(\kappa_2)$ και επειδή $\kappa_1<\kappa_2$, είναι:

$$\frac{f'(\kappa_1)-f'(\kappa_2)}{\kappa_1-\kappa_2}<0$$

Όμως για την f΄ εφαρμόζεται το ΘΜΤ στο διάστημα $[\kappa_1,\kappa_2]$, οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (\kappa_1,\kappa_2)$ ώστε

$$f''(\xi_1)=\frac{f'(\kappa_1)-f'(\kappa_2)}{\kappa_1-\kappa_2}<0$$

vi) Είναι $f'(\kappa_3)<0$, $f'(\kappa_4)>0$, άρα $f'(\kappa_3)<f'(\kappa_4)$ και επειδή $\kappa_3<\kappa_4$ είναι

$$\frac{f'(\kappa_3)-f'(\kappa_4)}{\kappa_3-\kappa_4}>0$$

Όμως για την f΄ εφαρμόζεται το ΘΜΤ στο διάστημα $[\kappa_3,\kappa_4]$, οπότε υπάρχει $\xi_2 \in (\kappa_3,\kappa_4)$ ώστε

$$f''(\xi_2)=\frac{f'(\kappa_3)-f'(\kappa_4)}{\kappa_3-\kappa_4}>0$$

Δείξαμε έτσι ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f''(\xi_1)<0$ και $f''(\xi_2)>0$.

γ. Από το β ερώτημα με βάση το θεώρημα Bolzano για την f″ στο κλειστό διάστημα με άκρα ξ_1, ξ_2 προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο ξ_0 που ανήκει στο ανοικτό διάστημα με άκρα ξ_1, ξ_2 ώστε $f''(\xi_0)=0$.

Το σημείο ξ_0 θα ήταν σημείο καμπής της συνάρτησης εφόσον η f″ άλλαζε πρόσημο εκατέρωθεν αυτού. Όμως κάτι τέτοιο δεν εξασφαλίζεται από τα δεδομένα του θέματος.

<u>**Αιτιολογήσεις για το ερώτημα δ του 3ου θέματος:**</u>

(*) Η f^{-1} είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο $\Re$, σύμφωνα με την πρόταση που λέει ότι αν η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη σε διάστημα Δ τότε υπάρχει η αντίστροφή της η οποία είναι επίσης συνεχής στο f(Δ) και διατηρεί το ίδιο είδος μονοτονίας με την f. (Η πρόταση αυτή, όμως, δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο).

(**)Ισχύει ότι: $f^{-1}(0)=0$. Πράγματι για x=0 έχουμε: $f^{-1}(0)=y \Leftrightarrow f(f^{-1}(0))=f(y) \Leftrightarrow 0=f(y) \Leftrightarrow 0=y^5+y^3+y \Leftrightarrow y(y^4+y^2+1)=0 \Leftrightarrow y=0$.

(***)

- **Η εξίσωση $x^5+x^3+x=3$ έχει μοναδική λύση την x=1 γιατί η f(x) είναι 1-1 στο $\Re$ και επομένως κάθε οριζόντια ευθεία, οπότε και η y=3, τέμνει την C_f σε μοναδικό σημείο.**
- **Η εξίσωση $x^5+x^3+x=0$ έχει μοναδική λύση την x=0, γιατί $x(x^4+x^2+1)=0 \Leftrightarrow x=0$, αφού $x^4+x^2+1>0$ για κάθε $x \in \Re$.**

β΄ τρόπος λύσης για το θέμα 4β:

Από το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής για την f που είναι συνεχής στο [α,β] εξασφαλίζεται ότι υπάρχουν δύο σημεία x_1, $x_2 \in [\alpha,\beta]$ με $x_1<x_2$ ώστε $f(x_1)\leq f(x)\leq f(x_2)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

Εφόσον η f παίρνει μία τουλάχιστον αρνητική τιμή και μία τουλάχιστον θετική (πράγμα που συνεπάγεται από την δοσμένη σχέση $f(\gamma)\cdot f(\delta)<0$), η ελάχιστη τιμή $f(x_1)$ θα είναι αρνητική, ενώ η μέγιστη τιμή $f(x_2)$ θα είναι θετική.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) άρα και στα εσωτερικά σημεία x_1,x_2, που επειδή είναι θέσεις ακρότατων από το θ. Fermat συνάγεται ότι $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

Στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f΄ δεν μπορεί να είναι η σταθερή μηδενική διότι τότε η f θα ήταν σταθερή και άρα $f(x_1)=f(x_2)$ ή $f_{max}=f_{min}$ – άτοπο διότι υπάρχουν τα δοσμένα γ,δ για τα οποία ισχύει από υπόθεση $f(\gamma)\cdot f(\delta)<0$.

Συνεπώς υπάρχει σημείο $x_3 \in (x_1,x_2)$ ώστε $f'(x_3)>0$ ή $f'(x_3)<0$. Έστω πχ $f'(x_3)>0$.

Τότε

- από ΘΜΤ για την f΄ στο $[x_1,x_3]$, υπάρχει $\xi_1 \in (x_1,x_3)$ ώστε:

$$f''(\xi_1)=\frac{f'(x_3)-f'(x_1)}{x_3-x_1}=\frac{f'(x_3)}{x_3-x_1}>0$$

- από ΘΜΤ για την f΄ στο $[x_3,x_2]$, υπάρχει $\xi_2 \in (x_3,x_2)$ ώστε:

$$f''(\xi_2)=\frac{f'(x_2)-f'(x_3)}{x_2-x_3}=\frac{-f'(x_3)}{x_2-x_3}<0$$

Αν υποθέταμε $f(x_3)<0$ θα προέκυπτε $f''(\xi_1)<0$, $f''(\xi_2)>0$.