ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να δείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

Μονάδες 12

Β.1. Έστω η συνάρτηση f(x) = ημx. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)$ = συνx . **Μονάδες 8**

Β.2. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α,β] και συνεχής στο (α,β], τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α,β] μία μέγιστη τιμή. **Μονάδα 1**

β. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη. **Μονάδα 1**

γ. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0$, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$. **Μονάδα 1**

δ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε

$\int f(x)dx = xf(x) - \int x f'(x)dx$. **Μονάδα 1**

ε. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0. **Μονάδα 1**

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $f(\nu) = i^\nu z$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

α. Να δείξετε ότι f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0 . **Μονάδες 7**

β. Αν $|z| = \rho$ και Arg(z) = θ, να δείξετε ότι

$$f(13) = \rho\left[\text{συν}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + i\,\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right].$$ **Μονάδες 8**

γ. Αν $|z| = 2$ και Arg(z) = $\frac{\pi}{3}$, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών 0, z και f(13). **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης fog είναι 1-1.

α. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1. **Μονάδες 7**

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

Μονάδες 18

ΘΕΜΑ 4ο

α. Έστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο [α, β].
Να αποδείξετε ότι αν $h(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε και $\int_\alpha^\beta h(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx$. **Μονάδες 2**

β. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 0 .$$

ι) Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f. **Μονάδες 5**

ιι) Να δείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < x f'(x)$, για κάθε $x > 0$. **Μονάδες 12**

ιιι) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1)$.

Μονάδες 6