

**ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 . Να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Μονάδες 7,5

A.2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

α. $|z|^2 = z \bar{z}$ **β.** $|z^2| = z^2$ **γ.** $|z| = -|\bar{z}|$ **δ.** $|z| = |\bar{z}|$

ε. $|i \bar{z}| = |z|$

Μονάδες 5

B.1. Αν $z_1 = 3 + 4i$ κι $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$, να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της **Στήλης Β** έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $ z_1 \cdot z_2 $	α. 4
2. $ z_1^2 $	β. 2
3. $ z_2 ^2$	γ. 25
4. $- \bar{z}_1 $	δ. -5
5. $ i z_2 $	ε. -2
	στ. 5
	ζ. 10

Μονάδες 7,5

B.2. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z| = 1$, να δείξετε ότι $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^2, & x \leq 3 \\ \frac{1-e^{x-3}}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$$

α. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι $\alpha = -1/9$.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(4, f(4))$. Μονάδες 7

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Για μια συνάρτηση f , που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbf{R} , ισχύει ότι:

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbf{R},$$

όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα. Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. Μονάδες 8

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f , συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbf{R} , για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

i) $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$

ii) $f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t f^2(xt) dt$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

α. Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x) = -2xf^2(x)$ Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή. Μονάδες 4

γ. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Μονάδες 4

δ. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(x) \eta \mu 2x)$. Μονάδες 7