ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Σάββατο 12 Ιανουαρίου 2019
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}, \nu\in\mathbb{N}-\{0,1\}$

είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Α2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ ελάχιστο το $f(x_0)$;

Μονάδες 4

Α3. Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός :

<< **Υπάρχει το όριο στο μηδέν της συνάρτησης** $f(x)=\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}, \nu\in\mathbb{N}$ >>

(α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό **Αληθή** ή **Ψευδή.**

Μονάδες 1

(β) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας στο (α) ερώτημα.

Μονάδες 3

Α4. Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στο τετράδιο σας, με συμπληρωμένες τις δύο τελευταίες γραμμές τοποθετώντας ερωτηματικό **(;)** στις περιπτώσεις όπου έχουμε απροσδιοριστία.

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$ το όριο της f είναι:	$+\infty$	$-\infty$	0	$\alpha < 0$	$+\infty$	$\alpha > 0$
Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$ το όριο της g είναι:	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της $f + g$ είναι:						
τότε το όριο της $f \cdot g$ είναι						

Μονάδες 6

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη

(α) Κάθε συνεχής συνάρτηση διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές της ρίζες χωρίζουν το πεδίο ορισμού της

(β Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε δε μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0

(γ) Αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$,τότε και η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

δ) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα

(ε) Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^{x}, \alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=x\cdot\alpha^{x-1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=1-e^{x}, x\in\mathbb{R}$ και $h(x)=\ln\frac{1}{x}, x>0$

Β1. Να ορίσετε την συνάρτηση $h\circ g$

Μονάδες 5

Β2. Αν $f(x)=(h\circ g)(x)=\ln\left(\frac{1}{1-e^{x}}\right), x<0$ να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της .

Μονάδες 8

Β3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντιστροφή της .

Μονάδες 7

Β4. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu f(x)}{\ln(-x)}=0$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $A=[-5,5]$ για την οποία ισχύουν ότι:

$$x^{2}+f^{2}(x)=25 \text{ για κάθε } x\in A \text{ και } f(0)=5$$

Γ1. Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα $A=[-5,5]$

Μονάδες 2

Γ2. Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{25-x^2},\ x\in A$

Μονάδες 7

Γ3. **(i)** Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,5]$

Μονάδες 4

(ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^3)-f(x^2)>x^3-x^2$ στο διάστημα $[0,1]$

Μονάδες 5

Γ4. Να δείξετε ότι η f έχει μέγιστη τιμή $f(0)=5$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι η εξίσωση $\sqrt{24+\sigma\upsilon\nu^2 x}=6+\eta\mu^2 f(x)$ είναι αδύνατη .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

για τις οποίες ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-x^2+4}{x-2}=1$ και $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(1+h)-g(1-h)}{h}=10$
- Η γραφική παράσταση της g διέρχεται από το σημείο $M(1,-5)$,η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μοναδική λύση την $x=3$ και $g(0)\cdot g(4)<0$

Δ1. Να δείξετε ότι **(α)** $f'(2)=5$ **(β)** $g'(1)=5$

Μονάδες 8

Δ2. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της f στο σημείο $A(2, f(2))$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g στο σημείο $B(1, g(1))$

Μονάδες 5

Δ3. Να μελετήσετε τη g ως προς το πρόσημο και να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [3,5]$ ώστε $g(x) \le g(x_0)$ για κάθε $x \in (-\infty, 5]$

Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $xf(x) = (x-2)e^x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,2)$

Μονάδες 6