

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 12 Ιανουαρίου 2019
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 106

A2. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελίδα 32

A3. (α) Ψευδής .

(β) Για $v=0$ παίρνουμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ για την οποία $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ ενώ

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ επομένως δεν υπάρχει το όριο της $f(x) = \frac{1}{x}$ στο $x=0$ άρα δεν υπάρχει στο

μηδέν το όριο της $f(x) = \frac{1}{x^{2v+1}}, v \in \mathbb{N}$

A4.

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$ το όριο της f είναι:	$+\infty$	$-\infty$	0	$\alpha < 0$	$+\infty$	$\alpha > 0$
Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$ το όριο της g είναι:	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της $f+g$ είναι:	;	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της $f \cdot g$ είναι	$-\infty$	$+\infty$;	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

A5.

(α) Σωστό **(β)** Σωστό **(γ)** Σωστό **(δ)** Λάθος **(ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. Για να ορίζεται η $h \circ$ πρέπει το σύνολο $A = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_h\}$ να μην είναι το κενό .

Πράγματι :

$$\begin{cases} x \in A_g \\ g(x) \in A_h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ 1 - e^x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ e^x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Άρα $A = (-\infty, 0)$ και ο τύπος της είναι $(h \circ g)(x) = \ln\left(\frac{1}{1-e^x}\right)$

B2. Για την $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-e^x}\right), x < 0$ θεωρούμε τυχαία $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ με $x_1 < x_2$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow -e^{x_1} > -e^{x_2} \Rightarrow 1 - e^{x_1} > 1 - e^{x_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 - e^{x_1}} < \frac{1}{1 - e^{x_2}} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{1 - e^{x_1}}\right) < \ln\left(\frac{1}{1 - e^{x_2}}\right) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Επομένως η f γνησίως αύξουσα στο $A = (-\infty, 0)$

Η f συνεχής στο $A = (-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα επομένως το σύνολο τιμών της είναι

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)\right) = (0, +\infty)$$

διότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{1}{1 - e^x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln 1 - \ln(1 - e^x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\ln(1 - e^x)) = 0$

Επειδή :θέτοντας $u = 1 - e^x$ παίρνουμε $u_0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} u = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^x) = 1$ άρα

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-\ln(1 - e^x)) = -\lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln\left(\frac{1}{1 - e^x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\ln 1 - \ln(1 - e^x)) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-\ln(1 - e^x)) = +\infty$$

Επειδή :θέτοντας $u = 1 - e^x$ παίρνουμε $u_0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} u = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - e^x) = 0$ άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (-\ln(1 - e^x)) = -\lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = +\infty$$

B3. Η f γνησίως αύξουσα στο $A = (-\infty, 0)$ άρα και 1-1 επομένως αντιστρέφεται .

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f δηλαδή $A_{f^{-1}} = f(A) = (0, +\infty)$

$$f(x) = y \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{1-e^x}\right) = y \Leftrightarrow \frac{1}{1-e^x} = e^y \Leftrightarrow 1-e^x = \frac{1}{e^y} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{e^y} = e^x$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(1-\frac{1}{e^y}\right) \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{e^y-1}{e^y}\right)$$

Επομένως $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{e^x}\right)$ με $A_{f^{-1}} = (0, +\infty)$

B4. Για την εύρεση του $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu f(x)}{\ln(-x)}$ έχουμε:

$$\left| \frac{\eta\mu f(x)}{\ln(-x)} \right| = \frac{|\eta\mu f(x)|}{|\ln(-x)|} \leq \frac{1}{|\ln(-x)|}$$

Επομένως: $-\frac{1}{|\ln(-x)|} \leq \frac{\eta\mu f(x)}{\ln(-x)} \leq \frac{1}{|\ln(-x)|}$

Όμως: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(-x) = -\infty$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} |\ln(-x)| = +\infty$ άρα $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{|\ln(-x)|} = 0$ και

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{|\ln(-x)|}\right) = 0$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu f(x)}{\ln(-x)} = 0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x \in [-5, 5]$ ισχύει: $x^2 + f^2(x) = 25 \Leftrightarrow f^2(x) = 25 - x^2$ (1)

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 25 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = 5 \text{ ή } x = -5$$

Γ2. Η f συνεχής στο $[-5, 5]$ και μηδενίζεται μόνο στα $x = 5$ και $x = -5$ άρα διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(-5, 5)$

Από τη σχέση (1) έχουμε : $|f(x)| = \sqrt{25-x^2}$ και η f διατηρεί πρόσημο στο $(-5,5)$ δηλαδή $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-5,5)$ ή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (-5,5)$.

Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι $f(0) = 5$ άρα $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [-5,5]$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για τις τιμές των άκρων του διαστήματος επομένως $f(x) = \sqrt{25-x^2}$

Γ3. (i) Για κάθε $x_1, x_2 \in [0,5]$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow -x_1^2 > -x_2^2 \Rightarrow 25-x_1^2 > 25-x_2^2 \\ &\Rightarrow \sqrt{25-x_1^2} > \sqrt{25-x_2^2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad (1) \end{aligned}$$

και

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1),(2) προκύπτει $g(x_1) > g(x_2)$ άρα η g γνησίως φθίνουσα στο $[0,5]$

(ii) Για κάθε $x \in [0,1]$ η ανίσωση γίνεται :

$$f(x^3) - f(x^2) > x^3 - x^2 \Leftrightarrow f(x^3) - x^3 > f(x^2) - x^2 \Leftrightarrow g(x^3) > g(x^2)$$

Και επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα έχουμε $x^3 < x^2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) < 0$

Το πρόσημο του $x^2(x-1)$ φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x^2	+	+	+	+
$x-1$	-	-	+	+
$x^2(x-1)$	-	-	+	+

Άρα η ανίσωση $x^2(x-1) < 0$ με $x \in [0,1]$ αληθεύει μόνο όταν $x \in (0,1)$

Γ4.

Ισχύει :

$\sqrt{25-x^2} \leq 5 \Leftrightarrow f(x) \leq f(0)$ για κάθε $x \in [-5,5]$ και επειδή $f(0) = 5$ έχουμε $f(x) \leq f(0)$ για κάθε $x \in [-5,5]$ επομένως στη θέση $x = 0$ έχει μέγιστο το $f(0) = 5$

Η εξίσωση $\sqrt{24 + \sin^2 x} = 6 + \eta\mu^2 f(x)$ ισοδύναμα γίνεται:

$$\sqrt{24 + \sin^2 x} = 6 + \eta\mu^2 f(x) \Leftrightarrow \sqrt{24 + 1 - \eta\mu^2 x} = 6 + \eta\mu^2 f(x)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{25 - \eta\mu^2 x} = 6 + \eta\mu^2 f(x) \Leftrightarrow f(\eta\mu x) = 6 + \eta\mu^2 f(x)$$

$$\Leftrightarrow f(\eta\mu x) = 5 + 1 + \eta\mu^2 f(x) \Leftrightarrow f(\eta\mu x) - 5 = 1 + \eta\mu^2 f(x)$$

Η τελευταία ισότητα δεν επαληθεύεται για κανέναν πραγματικό αριθμό διότι $1 + \eta\mu^2 f(x) \geq 1$ και $f(\eta\mu x) - 5 \leq 0$ εφόσον $f(x) \leq 5$ για κάθε $x \in [-5, 5]$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. (α) Θέτουμε $h(x) = \frac{f(x) - x^2 + 4}{x - 2}$, $x \neq 2$ με $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 1$ επομένως

$$h(x)(x - 2) = f(x) - x^2 + 4 \Leftrightarrow f(x) = h(x)(x - 2) + x^2 - 4$$

Από την τελευταία ισότητα έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} [h(x)(x - 2) + x^2 - 4] = 0$$

και επειδή η f συνεχής στο $x = 2$ (από υπόθεση ξέρουμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}) θα ισχύει $f(2) = 0$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)h(x) + x^2 - 4}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)h(x) + (x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} [h(x) + x + 2] = 5$$

(β) Το σημείο $M(1, -5)$ ανήκει στην C_g άρα $g(1) = -5$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1-h)}{h} = 10 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1-h) + g(1) - g(1)}{h} = 10$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{g(1+h) - g(1)}{h} - \frac{g(1-h) - g(1)}{h} \right) = 10 \quad (1)$$

Η g παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} άρα: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = g'(1)$

Για το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1-h) - g(1)}{h}$ θέτουμε $u = -h$ άρα $u_0 = \lim_{h \rightarrow 0} u = \lim_{h \rightarrow 0} (-h) = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1-h) - g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+u) - g(1)}{-u} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+u) - g(1)}{u} = -g'(1)$$

Άρα η σχέση (1) γίνεται :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{g(1+h) - g(1)}{h} - \frac{g(1-h) - g(1)}{h} \right) = 10$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1-h) - g(1)}{h} = 10$$

$$\Leftrightarrow g'(1) + g'(1) = 10 \Leftrightarrow 2g'(1) = 10 \Leftrightarrow g'(1) = 5$$

Δ2.

Η εξίσωση εφαπτομένης της f στο $A(2, f(2))$ είναι:

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y = 5x - 10$$

Η εξίσωση εφαπτομένης της g στο $B(1, g(1))$ είναι:

$$y - g(1) = g'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y + 5 = 5x - 5 \Leftrightarrow y = 5x - 10$$

Άρα η εφαπτομένη της f στο σημείο $A(2, f(2))$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g στο σημείο $B(1, g(1))$

Δ3.

Η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 3$ και επειδή η g συνεχής στο \mathbb{R} θα διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα $A_1 = (-\infty, 3)$ και $A_2 = (3, +\infty)$

Επειδή $g(1) = -5 < 0$ και $1 \in A_1$ λόγω της διατήρησης προσήμου της f στο A_1 θα έχουμε $g(x) < 0$ για κάθε $x \in A_1$

Από την σχέση $g(0) \cdot g(4) < 0$ συμπεραίνουμε ότι οι αριθμοί $g(0), g(4)$ είναι ετερόσημοι.

Το $0 \in A_1$ και $g(x) < 0$ για κάθε $x \in A_1$ άρα $g(0) < 0$ οπότε $g(4) > 0$

Άρα $g(4) > 0$ και $4 \in A_2$ λόγω της διατήρησης προσήμου της f στο A_2 θα έχουμε $g(x) > 0$ για κάθε $x \in A_2$.

Η g συνεχής στο $[3, 5]$ άρα θα έχει μέγιστη τιμή.

Δηλαδή θα υπάρχει $x_0 \in [3, 5]$ τέτοιος ώστε $g(x) \leq g(x_0)$

Όμως $g(x_0) > 0$ και $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 3)$ άρα $g(x) \leq g(x_0)$ για κάθε $x \in (-\infty, 5]$

Δ4. Για $x \neq 0, x \neq 2$ έχουμε

$$xf(x) = (x-2)e^x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x-2} = \frac{e^x}{x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x-2} - \frac{e^x}{x} = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{x-2} - \frac{e^x}{x}, x \in (0, 2)$ η οποία είναι συνεχής στο $(0, 2)$, επίσης

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x)}{x-2} - \frac{e^x}{x} \right) = \frac{f(0)}{-2} - (+\infty) = -\infty$$

$$\text{διότι : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^x \frac{1}{x} \right) = 1 \cdot (+\infty) = +\infty \text{ και } \frac{f(0)}{-2} > 0$$

άρα υπάρχει αριθμός α κοντά στο 0^+ ώστε $f(\alpha) < 0$

και

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{f(x)}{x-2} - \frac{e^x}{x} \right) = f'(2) - \frac{e^2}{2} = 5 - \frac{e^2}{2} = \frac{10 - e^2}{2} > 0$$

άρα υπάρχει αριθμός β κοντά στο 2^- ώστε $f(\beta) > 0$

Η h συνεχής στο $[\alpha, \beta] \subseteq (0, 2)$ και $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ άρα από θεώρημα Bolzano



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2019
Α΄ ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3ΘΟ(α)

υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta) \subseteq (0, 2)$ τέτοιος ώστε $h(x_0) = 0$

ΧΑΨΙΔΑΚΗΤΩΣ