



**ΤΑΞΗ:** Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Ημερομηνία:** Δευτέρα 7 Ιανουαρίου 2019  
**Διάρκεια Εξέτασης:** 3 ώρες

### ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ Α

- A1.** Δίνεται ένα διάνυσμα  $\overline{AB}$  και ένα σημείο αναφοράς  $O$ . Για την διανυσματική ακτίνα  $\overline{OM}$  του μέσου  $M$ , του τμήματος  $AB$ , να αποδείξετε ότι  $\overline{OM} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2}$ .  
**(8 Μονάδες)**
- A2.** Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$ ;  
**(7 Μονάδες)**
- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- Αν  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  είναι δυο μη μηδενικά διανύσματα τότε  $\vec{\alpha} / |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = -1$ .
  - Η απόσταση των σημείων  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  είναι ίση με  $(AB) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .
  - Αν  $\vec{\alpha} = (x, y)$  είναι ένα διάνυσμα με  $x \neq 0$ , τότε ο συντελεστής διεύθυνσής του είναι  $\lambda = \frac{y}{x}$ .
  - Αν  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  είναι δυο μη μηδενικά διανύσματα τότε  $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ .

- ν. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο  $A(x_0, y_0)$  και είναι παράλληλη στον άξονα  $y'y'$  έχει εξίσωση  $x = x_0$ .

(10 Μονάδες)

### ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  για τα οποία ισχύει  $|\vec{\alpha}|=1$ ,  $|\vec{\beta}|=2$  και  $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$ .

- B1.** Να βρείτε το  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ .

(5 Μονάδες)

- B2.** Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε  $(\vec{\beta} + \lambda\vec{\alpha})(\lambda\vec{\beta} - \vec{\alpha}) = 3$ .

(6 Μονάδες)

- B3.** Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  το διάνυσμα  $\vec{x} = (\vec{\alpha}(\vec{\alpha} + \vec{\beta}), \vec{\beta}(2\vec{\alpha} - \vec{\beta}))$ .

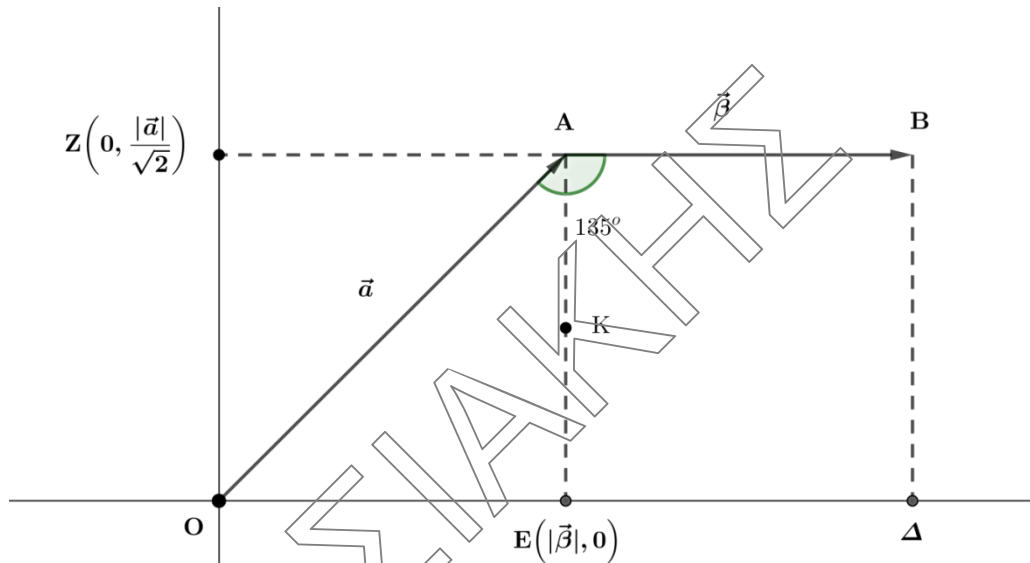
(7 Μονάδες)

- B4.** Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα  $\vec{u} = |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|\vec{\beta} + |2\vec{\alpha} + \vec{\beta}|\vec{\alpha}$  και  $\vec{v} = |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|\vec{\beta} - |2\vec{\alpha} + \vec{\beta}|\vec{\alpha}$  είναι κάθετα μεταξύ τους.

(7 Μονάδες)

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a}$  και  $\vec{b}$  ορθοκανονικού συστήματος, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, για τα οποία ισχύει  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$ , Κ είναι το μέσο του ΑΕ και το ΟΑΒΔ είναι τραπέζιο με  $\hat{B} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ .



**Γ1.** Να δείξετε ότι  $|\vec{b}| = 2$  και  $\vec{a} = (2, 2)$ .

**(8 Μονάδες)**

**Γ2** Να δείξετε ότι σημείο Κ έχει συντεταγμένες (2,1) και στην συνέχεια να αποδείξετε ότι τα σημεία Ο, Κ και Β είναι συνευθειακά.

**(7 Μονάδες)**

**Γ3** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ( $\epsilon_1$ ) που διέρχεται από το σημείο Κ και είναι κάθετη στην ευθεία ΟΑ.

**(6 Μονάδες)**

**Γ4.** Να βρείτε το συμμετρικό του Κ ως προς την ευθεία ΟΑ.

**(4 Μονάδες)**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2019**  
Α' ΦΑΣΗ

E\_3.Μλ2Θ(ε)

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  και η ευθεία  $(\varepsilon): \frac{x}{|\vec{\alpha}|} - \frac{y}{|\vec{\beta}|} = 1$  η οποία σχηματίζει με τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  ισοσκελές τρίγωνο  $AOB$ .

- Δ1.** Να βρείτε τα σημεία τομής  $A, B$  της ευθείας  $(\varepsilon)$  με τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  αντίστοιχα και να αποδείξετε ότι  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ . **(8 Μονάδες)**
- Δ2.** Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου  $BM$  του τριγώνου  $AOB$ . **(5 Μονάδες)**
- Δ3.** Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της ευθείας  $y = -x$  ισαπέχει από τα σημεία  $A$  και  $B$ . **(5 Μονάδες)**
- Δ4.** Αν η ευθεία  $(\eta): (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})x - |\vec{\alpha}|^2 y + 2019|\vec{\alpha}|^2 = 0$  είναι κάθετη στην  $(\varepsilon)$  τότε να δείξετε ότι τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  είναι αντίρροπα. **(7 Μονάδες)**