ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 21 Απριλίου 2018
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 217

Α2. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελίδα 15

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 76 μόνο η διατύπωση του θεωρήματος που βρίσκεται στο πλαίσιο.

Α4. **α)**Λάθος, **β)** Λάθος, **γ)** Σωστό, **δ)**Λάθος, **ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με

- $f'(x)=(1+x)'\cdot e^{-x}+(1+x)\cdot\left(e^{-x}\right)'=e^{-x}-(1+x)\cdot e^{-x}=-xe^{-x}\le 0$

για κάθε $x\ge 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ και στη θέση $x=0$ η f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο το $f(0)=1$

Η f' παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με

$$f''(x)=\left(-xe^{-x}\right)'=-e^{-x}+xe^{-x}=(x-1)\cdot e^{-x},\ \ x\ge 0$$

- $f''(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot e^{-x}=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$
  $f''(x)>0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot e^{-x}>0 \Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1$
  $f''(x)<0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot e^{-x}<0 \Leftrightarrow x-1<0 \Leftrightarrow 0<x<1$

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	-		+
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

Άρα η f κοίλη στο $[0,1]$ και κυρτή στο $[1,+\infty)$.

Η f για x=1 παρουσιάζει καμπή και $M\left(1,\frac{2}{e}\right)$ είναι το σημείο καμπής.

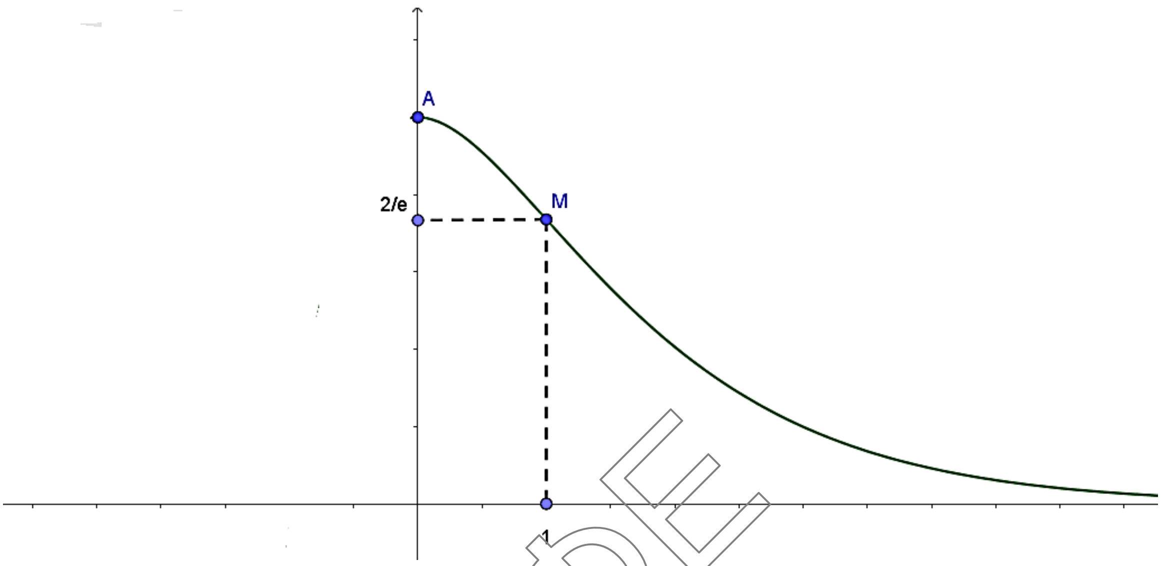
Β2. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)\cdot e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+x}{e^{x}}\left(\text{μορφή } \frac{+\infty}{+\infty}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)'}{\left(e^{x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}=0 \text{ αφού } \lim_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$$

η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Πίνακας μεταβολών της f - Γραφική παράσταση

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f''(x)$	-		+
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$
	Φθίνουσα και κοίλη		Φθίνουσα και κυρτή



Β3. Η συνάρτηση $f \circ g$ ορίζεται όταν

$$A' = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\} \neq \varnothing$$

Επομένως πρέπει

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \text{ άρα } x \geq 1$$

Άρα $A_{f \circ g} = [1, +\infty)$ και ο τύπος της είναι :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (1 + g(x)) \cdot e^{-g(x)}$$

$$= (1 + \ln x) \cdot e^{-\ln x} = \frac{1 + \ln x}{e^{\ln x}} = \frac{1 + \ln x}{x}, \ x \geq 1$$

Β4. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \int_1^{\lambda} \left| \frac{1 + \ln x}{x} \right| dx$

Όμως $1 + \ln x > 0$ για κάθε $x \in [1, \lambda]$ αφού $\ln x \geq 0$ για $x \geq 1$

Άρα

$$E=\int_1^{\lambda}\frac{1+\ln x}{x}dx=\int_1^{\lambda}\frac{1}{x}dx+\int_1^{\lambda}\frac{\ln x}{x}dx$$
$$=\int_1^{\lambda}(\ln x)'\,dx+\frac{1}{2}\int_1^{\lambda}2(\ln x)'\cdot\ln x\,dx$$

$$=\left[\ln x\right]_1^{\lambda}+\frac{1}{2}\left[(\ln x)^2\right]_1^{\lambda}=\ln\lambda+\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2,\lambda>1$$

Πρέπει :

$$E=\frac{3}{2}\Leftrightarrow \ln\lambda+\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2\ln\lambda+(\ln\lambda)^2=3\Leftrightarrow(\ln\lambda)^2+2\ln\lambda-3=0$$

Αν $\ln\lambda=\kappa$ έχουμε $\kappa^2+2\kappa-3=0\Leftrightarrow \kappa=\frac{-2\pm4}{2}\langle\begin{matrix}\kappa=-3\\ \kappa=1\end{matrix}$

Άρα

$$\ln\lambda=-3\Leftrightarrow\lambda=e^{-3}=\frac{1}{e^3}<1 \text{ απορρίπτεται}$$

ή $\ln\lambda=1\Leftrightarrow\lambda=e>1$ δεκτή.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $A(x_0,f(x_0))$ το σημείο και $\varepsilon: y-f(x_0)=f'(x)\cdot(x-x_0)$ η εξίσωση της εφαπτομένης σ' αυτό.

Η (ε) διέρχεται από το Μ(α,0) όταν:

$$0-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(\alpha-x_0)\Leftrightarrow -f(x_0)=\alpha\cdot f'(x_0)-x_0\cdot f'(x_0)\ (1)$$

Είναι $f'(x)=e^x+1$ οπότε η (1) γράφεται:

$$-e^{x_0}-x_0+\alpha=\alpha\cdot(e^{x_0}+1)-x_0(e^{x_0}+1)\Leftrightarrow$$
$$-e^{x_0}-x_0+\alpha=\alpha\cdot e^{x_0}+\alpha-x_0e^{x_0}-x_0\Leftrightarrow$$
$$-e^{x_0}-\alpha e^{x_0}+x_0e^{x_0}=0\Leftrightarrow(-1-\alpha+x_0)\cdot e^{x_0}=0$$

Άρα

$$-1-\alpha+x_0=0\Leftrightarrow x_0=1+\alpha$$

Η f παραγωγισιμη τουλάχιστον 2 φορές στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^x+1$ και $f''(x)=e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ επομένως η f κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Άρα η εφαπτομένη (ε) της C_f βρίσκεται κάτω από αυτήν με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Δηλαδή η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο Α δεν έχει άλλο κοινό σημείο με αυτή.

Γ2.

- Επειδή $f'(x)=e^x+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+x-\alpha\right)=0-\infty-\alpha=-\infty$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+x-\alpha\right)=+\infty+\infty-\alpha=+\infty$

Άρα $f(R)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=\mathbb{R}$

Το $0\in f(R)$ και f γνησίως αύξουσα, επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια λύση $x_0\in\mathbb{R}$.

Γ3. Ισχύει $f(x_0)=e^{x_0}+x_0-\alpha=0\Leftrightarrow \alpha-x_0=e^{x_0}>0$ άρα $x_0<\alpha$.

Έχουμε $e^{x_0}+1<\dfrac{e^\alpha}{e^{x_0}}<e^\alpha+1\Leftrightarrow e^{x_0}+1<\dfrac{e^\alpha}{\alpha-x_0}<e^\alpha+1$ (1)

Ισχύει το Θ.Μ.Τ για την f στο $[x_0,\alpha]$ διότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής

Επομένως υπάρχει $\xi\in(x_0,\alpha)$ τέτοιος ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\alpha)-f(x_0)}{\alpha-x_0}=\frac{f(\alpha)}{\alpha-x_0}=\frac{e^\alpha}{\alpha-x_0}$$

Η (1) γράφεται $f'(x_0)<f'(\xi)<f'(\alpha)$ που ισχύει διότι $x_0<\xi<\alpha$ και f' γνησίως αύξουσα εφόσον η f κυρτή στο $\mathbb{R}$

Γ4.

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $g\left(e^x\right)-g(\alpha-x)\le 0$

Έστω $h(x)=g\left(e^x\right)-g(\alpha-x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Για $x=x_0$, $h(x_0)=g\left(e^{x_0}\right)-g(\alpha-x_0)=g\left(e^{x_0}\right)-g\left(e^{x_0}\right)=0$

Άρα $h(x) \le h(x_0)$, $x \in \mathbb{R}$ που σημαίνει ότι η h για $x = x_0$ παρουσιάζει μέγιστο, είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό και το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της.
Σύμφωνα με το Θ.Fermat $h'(x_0) = 0$.

$$h'(x) = g'(e^x) \cdot e^x + g'(\alpha - x)$$

Άρα

$$h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow g'(e^{x_0})e^{x_0} + g'(\alpha - x_0) = 0 \Leftrightarrow g'(e^{x_0})e^{x_0} + g'(e^{x_0}) = 0$$

$$\Leftrightarrow g'(e^{x_0})(e^{x_0} + 1) = 0 \Leftrightarrow g'(e^{x_0}) = 0 \text{ ύ } e^{x_0} + 1 \ne 0$$

Επομένως η εφαπτομένη της C_g στο σημείο με τετμημένη $x = e^{x_0}$ είναι παράλληλη στον $x'x$.

β) Αφού η g είναι κοίλη, η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
και $g'(e^{x_0}) = 0$, οπότε

- $x < e^{x_0} \Leftrightarrow g'(e^x) > g'(e^{x_0}) \Leftrightarrow g'(e^x) > 0$
- $x > e^{x_0} \Leftrightarrow g'(e^x) < g'(e^{x_0}) \Leftrightarrow g'(e^x) < 0$

Το πρόσημο της g' και η μονοτονία της g φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί

x	$-\infty$		e^{x_0}		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Άρα η g γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, e^{x_0}]$ και η g γνησίως φθίνουσα στο $[e^{x_0}, +\infty)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ η ισότητα

$$\left(f(x) - \frac{x^2}{2}\right)' \cdot e^{f(x) - \frac{x^2}{2}} = -\eta\mu x$$

γράφεται

$$\left(e^{f(x)-\frac{x^2}{2}}\right)' = (\sigma\upsilon\nu x)'$$

Άρα

$$e^{f(x)-\frac{x^2}{2}} = \sigma\upsilon\nu x + c \quad (1)$$

Για $x=0$ η (1) γίνεται : $e^{f(0)} = \sigma\upsilon\nu 0 + c \Leftrightarrow e^0 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$

Επομένως $e^{f(x)-\frac{x^2}{2}} = \sigma\upsilon\nu x$, οπότε

$$\ln\left(e^{f(x)-\frac{x^2}{2}}\right) = \ln(\sigma\upsilon\nu x) \Leftrightarrow f(x) - \frac{x^2}{2} = \ln(\sigma\upsilon\nu x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln(\sigma\upsilon\nu x),\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Δ2. Η f παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με

$$f'(x) = x + \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x} = x - \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x},\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Ισχύει $f'(0) = 0$ και $\sigma\upsilon\nu x > 0$ στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η $x=0$ είναι μοναδική ρίζα και στη συνέχεια ότι $f'(x) > 0$ στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ και $f'(x) < 0$ στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

- Έστω $\varphi(x) = x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ η οποία έχει προφανή ρίζα την $x=0$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με

$$\varphi'(x) = \sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = -x\eta\mu x$$

$$\varphi'(x)=0 \Leftrightarrow -x\eta\mu x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \acute{\eta} \\ \eta\mu x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \acute{\eta} \\ x=0 \end{cases} \textbf{ για κάθε } x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

Το πρόσημο της φ' και η μονοτονία της φ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$-x$		+	0	-	
$\eta\mu x$		-	0	+	
$\varphi'(x)$		-	0	-	
$\varphi(x)$			$\searrow$		

- Για κάθε $-\frac{\pi}{2}<x<0$ ισχύει $\varphi(x)>\varphi(0)\Leftrightarrow\varphi(x)>0$
- Για κάθε $0<x<\frac{\pi}{2}$ ισχύει $\varphi(0)>\varphi(x)\Leftrightarrow\varphi(x)<0$

Επομένως για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε :

- $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{\varphi(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=0\Leftrightarrow\varphi(x)=0\Leftrightarrow x=0$
- $f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{\varphi(x)}{\sigma\upsilon\nu x}>0\Leftrightarrow\varphi(x)>0\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2}<x<0$
- $f'(x)<0\Leftrightarrow\frac{\varphi(x)}{\sigma\upsilon\nu x}<0\Leftrightarrow\varphi(x)<0\Leftrightarrow x>0$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗		↘	

Άρα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$ η f γνησίως αύξουσα και στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα συνεπώς η f για $x=0$ παρουσιάζει μοναδικό μέγιστο το

$$f(0)=\ln(\sigma\upsilon\nu 0)=\ln 1=0$$

Σημείωση:
Μπορούσαμε να βρούμε την $f''(x)$. Θεωρήσαμε τη $\varphi(x)=x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$ και βρήκαμε το πρόσημό της, το οποίο χρειάζεται στο ερώτημα Δ3.

Δ3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \eta\mu x = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2}{2} + \ln(\sigma\upsilon\nu x)\right) = 0$

Σύμφωνα με τον κανόνα του D'Hospital έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{f(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(\eta\mu x)'}{f'(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{f'(x)} = \lim_{x\to 0^+}\left[\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{1}{f'(x)}\right] = -\infty$$

Διότι : $f'(x) < 0$ για κάθε $x > 0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0$ άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{f'(x)} = -\infty$

Δ4. Σύμφωνα με το ερώτημα **Δ2** η f για $x = 0$ παρουσιάζει μέγιστο το $f(0) = 0$.

Άρα για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ ισχύει

$$f(x) \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + \ln(\sigma\upsilon\nu x) \le 0 \Leftrightarrow \ln(\sigma\upsilon\nu x) \le -\frac{x^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$e^{\ln(\sigma\upsilon\nu x)} \le e^{-\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \le e^{-\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{2}} - \sigma\upsilon\nu x \ge 0 \quad (1)$$

- Η $h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} - \sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ και δεν είναι παντού ίση με μηδέν, διότι η ισότητα στην (1) ισχύει μόνο για $x = 0$.

Επομένως

$$\int_0^{\pi/6} h(x)dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^{\pi/6}\left(e^{-\frac{x^2}{2}} - \sigma\upsilon\nu x\right)dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^{\pi/6} e^{-\frac{x^2}{2}}dx - \int_0^{\pi/6}\sigma\upsilon\nu x dx > 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi/6} e^{-\frac{x^2}{2}}dx > \int_0^{\pi/6}\sigma\upsilon\nu x dx \Leftrightarrow \int_0^{\pi/6} e^{-\frac{x^2}{2}}dx > [\eta\mu x]_0^{\pi/6} = \eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$