ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Σάββατο 13 Ιανουαρίου 2018
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = εφx$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \,/\, συνx = 0\}$ με $f'(x) = \dfrac{1}{συν^2x}$ δηλαδή $(εφx)' = \dfrac{1}{συν^2x}$.

Μονάδες 6

Α2. Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός:

Αν για δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x) \cdot g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

τότε: $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως ΑΛΗΘΗ ή ΨΕΥΔΗ.

(β) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας στο **(α)** ερώτημα.

Μονάδες 4

Α3. Να γράψετε στο τετράδιο σας δίπλα από τον αντίστοιχο αριθμό το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση.

1. Η αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = e^{x-2} + 2, x \in \mathbb{R}$ είναι:

(α) $f^{-1}(x) = \ln(x-2) + 2, x > 2$

(β) $f^{-1}(x)=\ln(x+2)+2, x>-2$

(γ) $f^{-1}(x)=\ln(x+2)-2, x>-2$

2. Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=3^{x^2}$ ισούται με

(α) $2x\cdot 3^{x^2}$ **(β)** $x^2\cdot 3^{x^2-1}$ **(γ)** $2x\cdot 3^{x^2}\cdot \ln 3$

3. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ με $f(-1)=3$ και $f(1)=4$

Τότε μπορούμε να ισχυριστούμε με βεβαιότητα ότι:

(α) Η μέγιστη τιμή της f το 3 και η ελάχιστη το 4.

(β) Η εξίσωση $f(x)=\pi$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,1)$.

(γ) Η f διατηρεί πρόσημο στο $[-1,1]$.

Μονάδες 9

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός τότε αυτό ισούται με το $f'(x_0)$.

2. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$ τότε και η συνάρτηση $f\circ g$ είναι πάντα παραγωγίσιμη στο x_0.

3. Αν η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ αντιστρέφεται τότε ισχύει $f\left(f^{-1}(x)\right)=x, x\in A$.

4. Αν για μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A ισχύει $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in A$ με $x_0\in A$ τότε λέμε ότι στη θέση x_0 η f παρουσιάζει μέγιστο με τιμή $f(x_0)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-12}{x-3}, & x\neq 3\\ k^2-2k+8, & x=3\end{cases}$

και η συνάρτηση $h(x)=x^{2017}+x^{2019}$ με $A_h=[0,1]$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $k=1$ και $f(x)=x+4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η συνάρτηση $h\circ f$ και ο τύπος της είναι

$g(x)=(h\circ f)(x)=(x+4)^{2017}+(x+4)^{2019}$ με πεδίο ορισμού $A=[-4,-3]$.

Μονάδες 6

Β3. (α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g.

Μονάδες 4

(β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in[-4,-3]$ τέτοιο ώστε:

$$2018\cdot g(x_0)-2035=0$$

Μονάδες 4

Β4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\eta\mu f(x)}{g(x)}$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

(i) $f(0)>1$

(ii) $f^2(x)-2f(x)=e^{2x}+2e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x)=e^x+2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Γ2. **α)** Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x+4x=\lambda$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$ για κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

β) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x)=e^x+2$ και $g(x)=-x^2+2$

έχουν μόνο μια κοινή εφαπτομένη.

Μονάδες 6

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x^2)-f(-x+2)>\ 4\,(g(x)-x)\quad \text{με } x\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 4

Γ4. Δυο σημεία με ίδια τετμημένη $A(x(t),y_1(t))$ και $B(x(t),y_2(t))$ κινούνται στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g αντίστοιχα. Αν η τετμημένη τους x αυξάνεται με ρυθμό $1\ cm/sec$ να βρείτε τη θέση των σημείων για την οποία ισχύει: $y_1'(t)=2y_2'(t)+1$ με $t\ge 0$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=2 \text{ και } \lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=1$$

Δ1. Να δείξετε ότι:

(α) $f(1)=1$

(β) $f'(1)=2$

Μονάδες4

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι $2^{ου}$ βαθμού και ο τύπος της είναι

$$f(x)=x^2, x\in\mathbb{R}$$

Μονάδες5

Δ3. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία έχει το ίδιο ελάχιστο με την f στην μοναδική θέση $x=\alpha,\ \alpha>0$.

Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο $M(x_0,y_0)$ με $x_0\in(0,\alpha)$.

Μονάδες8

Δ4. Αν επιπλέον ισχύει: $\lim_{h\to 0}\frac{g(g(x_0)+h)-g(g(x_0)-h)}{2h}=g'(\eta\mu g(x_0))$

με $x_0\in(0,\alpha)$ τότε να δείξετε ότι η συνάρτηση g' δεν είναι αντιστρέψιμη.

Μονάδες 8