ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Σάββατο 13 Ιανουαρίου 2018
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 114.

Α2. (α) Ψευδής

(β) Για τις συναρτήσεις $f(x)=x-|x|$, $g(x)=x+|x|$ με $A_f=A_g=\mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x)\cdot g(x)=(x-|x|)\cdot(x+|x|)=x^2-|x|^2=0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

όμως καμία από τις συναρτήσεις δεν είναι μηδενική.

Σημείωση: Το παραπάνω αποτελεί ένα αντιπαράδειγμα που τεκμηριώνει το ψευδές της πρότασης και προφανώς δεν είναι το μοναδικό.

Α3. **1. (α)**

Εξήγηση:

Η $f(x)=e^{x-2}+2, x\in\mathbb{R}$ έχει αντίστροφη την $f^{-1}(x)=\ln(x-2)+2, x>2$ διότι:

$$f(x)=y \Leftrightarrow e^{x-2}+2=y \Leftrightarrow e^{x-2}=y-2 \overset{y>2}{\Leftrightarrow} x-2=\ln(y-2) \Leftrightarrow x=\ln(y-2)+2$$

2. (γ)

Εξήγηση:

$$f(x)=3^{x^2}=e^{\ln 3^{x^2}}=e^{x^2\ln 3}$$

$$f'(x)=\left(e^{x^2\ln 3}\right)'=e^{x^2\ln 3}\left(x^2\ln 3\right)'=3^{x^2}\cdot 2x\ln 3$$

3. (β)

Εξήγηση

Από τα δεδομένα της εκφώνησης η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών.

Άρα για οποιονδήποτε αριθμό ανάμεσα στα $f(-1), f(1)$ στην προκειμένη περίπτωση τον αριθμό π υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1,1)$ ώστε $f(x_0) = \pi$

Α4. 1.ΣΩΣΤΟ 2.ΛΑΘΟΣ 3.ΛΑΘΟΣ 4.ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Εφόσον η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής και στο $x = 3$ δηλαδή

$$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$$

- $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 + x - 12}{x - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+4)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+4) = 7$
- $f(3) = k^2 - 2k + 8$

Επομένως

$$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) \Leftrightarrow k^2 - 2k + 8 = 7 \Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow (k-1)^2 = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

Άρα

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 12}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3 \end{cases}$$

Για $x \neq 3$ έχουμε $f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x - 3} = \frac{(x-3)(x+4)}{x-3} = x + 4$

Για $x = 3$ ισχύει: $f(3) = 7$ και εφόσον η f συνεχής θα έχουμε $f(x) = x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Β2. Το πεδίο ορισμού της $h\circ f$ αποτελείται από εκείνα τα $x\in A_f$ για τα οποία $f(x)\in A_h$

Δηλαδή: $x\in\mathbb{R}$ και $0\le x+4\le 1\Leftrightarrow -4\le x\le -3$

Οπότε $A_{f\circ h}=[-4,-3]$ και $(h\circ f)(x)=h(f(x))=(x+4)^{2017}+(x+4)^{2019}$

Άρα $g(x)=(h\circ f)(x)=(x+4)^{2017}+(x+4)^{2019}$ με πεδίο ορισμού $A=[-4,-3]$

Β3. **(α)** Για κάθε $x_1,x_2\in A$ με $x_1<x_2$ έχουμε

$$x_1<x_2\Rightarrow x_1+4<x_2+4\Rightarrow (x_1+4)^{2017}<(x_2+4)^{2017}\quad (1)$$

$$x_1<x_2\Rightarrow x_1+4<x_2+4\Rightarrow (x_1+4)^{2019}<(x_2+4)^{2019}\quad (2)$$

Με πρόσθεση των (1) και (2) προκύπτει: $g(x_1)<g(x_2)$ επομένως η g γνησίως αύξουσα στο A

Η g συνεχής ως πολυωνυμική στο $A=[-4,-3]$ και γνησίως αύξουσα σε αυτό επομένως

$$g(A)=[g(-4),g(-3)]=[0,2]$$

διότι:

$$g(-4)=(-4+4)^{2017}+(-4+4)^{2019}=0$$

και

$$g(-3)=(-3+4)^{2017}+(-3+4)^{2019}=1+1=2$$

(β) Α-τρόπος

Η εξίσωση $2018\cdot g(x)-2035=0$ είναι ισοδύναμη με $g(x)=\dfrac{2035}{2018}$

Ο αριθμός $\dfrac{2035}{2018}$ είναι θετικός και μικρότερος του 2 άρα ανήκει στο σύνολο τιμών της g, επομένως θα υπάρχει $x_0\in A$ ώστε $g(x_0)=\dfrac{2018}{2035}$, το x_0 μοναδικό διότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

Β-τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=2018\cdot g(x)-2035, x\in[-4,-3]$ η οποία είναι συνεχής στο $[-4,-3]$

Επίσης $\varphi(-4)=-2035$

και $\varphi(-3)=2018\cdot g(-3)-2035=2018\cdot 2-2035=2036-2035=1$

δηλαδή $\varphi(-4)\cdot\varphi(-3)<0$ άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(-4,-3)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=0$

Για κάθε $x_1,x_2\in[-4,-3]$ με $x_1<x_2$

$$x_1<x_2\overset{g1}{\Rightarrow}g(x_1)<g(x_2)\Rightarrow 2035\cdot g(x_1)<2035\cdot g(x_2)$$

$$\Leftrightarrow 2018\cdot g(x_1)-2035<2018\cdot g(x_2)-2035\Leftrightarrow\varphi(x_1)<\varphi(x_2)$$

Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα άρα το x_0 μοναδικό.

Β4

$$\lim_{x\to -4}\frac{\eta\mu f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to -4}\frac{\eta\mu(x+4)}{(x+4)^{2017}+(x+4)^{2019}}$$

$$=\lim_{x\to -4}\frac{\eta\mu(x+4)}{(x+4)\left[(x+4)^{2016}+(x+4)^{2018}\right]}$$

$$=\lim_{x\to -4}\left[\frac{\eta\mu(x+4)}{(x+4)}\cdot\frac{1}{(x+4)^{2016}+(x+4)^{2018}}\right]=+\infty$$

διότι: $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\eta\mu(x+4)}{x+4}\overset{(*)}{=}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$,

$(*)$ θέτοντας $u=x+4$ άρα $u_0=\lim\limits_{x\to -4}u=\lim\limits_{x\to -4}(x+4)=0$

Επίσης

$$\lim_{x\to -4}\left[(x+4)^{2016}+(x+4)^{2018}\right]=0$$

και $\left[(x+4)^{2016}+(x+4)^{2018}\right]>0$ κοντά στο -4

άρα

$$\lim_{x\to -4}\frac{1}{(x+4)^{2016}+(x+4)^{2018}}=+\infty$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από τη σχέση $f^2(x)-2f(x)=e^{2x}+2e^x$ η οποία ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f^2(x)-2f(x)=e^{2x}+2e^x \Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)+1=e^{2x}+2e^x+1$$

$$\Leftrightarrow (f(x)-1)^2=(e^x+1)^2 \Leftrightarrow |f(x)-1|=|e^x+1| \Leftrightarrow |f(x)-1|=e^x+1$$

Θεωρούμε $h(x)=f(x)-1$ άρα η τελευταία ισότητα γίνεται $|h(x)|=e^x+1$

$h(x)=0 \Leftrightarrow |h(x)|=0 \Leftrightarrow e^x+1=0 \Leftrightarrow e^x=-1$ αδύνατη επομένως $h(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και επειδή η h συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$

$h(0)=f(0)-1>0$ άρα $h(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε

$|h(x)|=e^x+1 \Leftrightarrow h(x)=e^x+1 \Leftrightarrow f(x)-1=e^x+1 \Leftrightarrow f(x)=e^x+2$

Γ2. **(α)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=e^x+4x, x\in\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα διότι για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με

$x_1<x_2$ έχουμε: $\begin{cases} x_1<x_2 \\ x_1<x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x_1}<e^{x_2} \\ 4x_1<4x_2 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} \varphi(x_1)<\varphi(x_2)$

Η φ συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ επομένως το σύνολο τιμών της είναι

$$\varphi(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to -\infty}\varphi(x), \lim_{x\to +\infty}\varphi(x)\right)=(-\infty,+\infty)$$

διότι: $\lim_{x\to -\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to -\infty}(e^x+4x)=0+(-\infty)=-\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+4x\right)=(+\infty)+(+\infty)=+\infty$

Ο αριθμός $\lambda\in\mathbb{R}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης φ οποιαδήποτε και αν είναι η τιμή του επομένως υπάρχει πάντα $x_0\in\mathbb{R}$ ώστε $\varphi(x_0)=\lambda$, το x_0 θα είναι μοναδικό διότι η φ είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως η εξίσωση $e^x+4x=\lambda$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$ για κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$

(β) Έστω $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,g(\beta))$ σημεία των γραφικών παραστάσεων f,g αντίστοιχα.

Η εξίσωση εφαπτομένης της f στο A είναι:

$$(\varepsilon_1): y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow y=f'(\alpha)x-\alpha f'(\alpha)+f(\alpha)$$

Η εξίσωση εφαπτομένης της g στο B είναι:

$$(\varepsilon_2): y-g(\beta)=g'(\beta)(x-\beta)\Leftrightarrow y=g'(\beta)x-\beta g'(\beta)+g(\beta)$$

Για να έχουν κοινή εφαπτομένη πρέπει οι ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ να ταυτίζονται δηλαδή

$$f'(\alpha)=g'(\beta) \text{ και } -\alpha\cdot f'(\alpha)+f(\alpha)=-\beta\cdot g'(\beta)+g(\beta)\ .$$

Από τη σχέση $f'(\alpha)=g'(\beta)$ παίρνουμε

$$f'(\alpha)=g'(\beta)\Leftrightarrow e^\alpha=-2\beta\Leftrightarrow \beta=-\frac{e^\alpha}{2}\ (1)$$

$$-\alpha\cdot f'(\alpha)+f(\alpha)=-\beta\cdot g'(\beta)+g(\beta)\Leftrightarrow -\alpha e^\alpha+e^\alpha+2=-\beta(-2\beta)-\beta^2+2$$

$$\Leftrightarrow -\alpha e^\alpha+e^\alpha=\beta^2\overset{(1)}{\Leftrightarrow}-\alpha e^\alpha+e^\alpha=\left(-\frac{e^\alpha}{2}\right)^2\Leftrightarrow -\alpha e^\alpha+e^\alpha=\frac{e^{2\alpha}}{4}\Leftrightarrow -\alpha+1=\frac{e^\alpha}{4}$$

$$\Leftrightarrow e^\alpha=-4\alpha+4\Leftrightarrow e^\alpha+4\alpha=4$$

Η τελευταία εξίσωση έχει μοναδική ρίζα **(Γ2(α))** για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ άρα υπάρχει και μοναδικό $\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\beta=-\frac{e^\alpha}{2}$ επομένως οι συναρτήσεις f,g έχουν μόνο μια κοινή εφαπτομένη.

Γ3.

$$f\left(x^2\right)-f\left(-x+2\right)>4g\left(x\right)-4x \Leftrightarrow e^{x^2}+2-\left(e^{-x+2}+2\right)>4\left(-x^2+2\right)-4x$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2}+4x^2>e^{-x+2}+4\left(-x+2\right) \Leftrightarrow \varphi\left(x^2\right)>\varphi\left(-x+2\right) \Leftrightarrow x^2>-x+2$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-2>0 \Leftrightarrow x<-2 \text{ ή } x>1$$

Γ4. $y_1\left(t\right)=e^{x(t)}+2$ ***άρα*** $y_1'\left(t\right)=e^{x(t)}\cdot x'\left(t\right)$

$y_2\left(t\right)=-x^2\left(t\right)+2$ ***άρα*** $y_2'\left(t\right)=-2\cdot x\left(t\right)\cdot x'\left(t\right)$

Ισχύει $x'\left(t\right)=1cm/sec$

$$y_1'\left(t\right)=2{y_2}'\left(t\right)+1 \Leftrightarrow e^{x(t)}\cdot x'\left(t\right)=2\left(-2\cdot x\left(t\right)\cdot x'\left(t\right)\right)+1$$

$$\Leftrightarrow e^{x(t)}=-4x\left(t\right)+1 \Leftrightarrow e^{x(t)}+4x\left(t\right)=1 \Leftrightarrow \varphi\left(x\left(t\right)\right)=0 \Leftrightarrow \varphi\left(x\left(t\right)\right)=\varphi\left(0\right) \Leftrightarrow x\left(t\right)=0$$

Άρα στο σημείο $A\left(0,f\left(0\right)\right)$ για την fκαι στο σημείο $B\left(0,g\left(0\right)\right)$ για την gισχύει

$y_1'\left(t\right)=2{y_2}'\left(t\right)+1$ δηλαδή στα σημεία $A\left(0,3\right)$ **και** $B\left(0,2\right)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. **(α)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $h\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)-1}{x-1}, x\neq 1$ $\left(1\right)$ με $\lim\limits_{x\to 1}h\left(x\right)=2$

Από τη σχέση $\left(1\right)$ έχουμε $f\left(x\right)=h\left(x\right)\left(x-1\right)+1$ άρα

$\lim\limits_{x\to 1}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left[h\left(x\right)\left(x-1\right)+1\right] \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}f\left(x\right)=1$ και επειδή η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής επομένως $f\left(1\right)=1$

(β) Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική επομένως

$$f'\left(1\right)=\lim_{x\to 1}\frac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}\overset{f(1)=1}{=}\lim_{x\to 1}\frac{f\left(x\right)-1}{x-1}=2$$

Δ2. Ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2+1}=1\,(2)$

Έστω $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0,\ \alpha_\nu\neq 0, \nu\in\mathbb{N}$

τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha_\nu x^\nu}{x^2}$ έχουμε τις εξής περιπτώσεις

Αν $\nu>2$ τότε $\alpha_\nu\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\nu-2}=\begin{cases}+\infty, \alpha_\nu>0\\ \text{ή}\\ -\infty, \alpha_\nu<0\end{cases}$ σε κάθε περίπτωση άτοπο λόγω της (2)

Αν $0\leq\nu<2$ τότε $\alpha_\nu\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^{2-\nu}}=0$ άτοπο λόγω της (2)

Άρα $\nu=2$ δηλαδή η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση $2^{ου}$ βαθμού οπότε

$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^2}{x^2+1}=\alpha$ και λόγω της (2) έχουμε $\alpha=1$

Άρα $f(x)=x^2+\beta x+\gamma$ από τις σχέσεις $f(1)=1$ και $f'(1)=2$ έχουμε:

$$f(1)=1\Leftrightarrow 1+\beta+\gamma=1\Leftrightarrow\beta+\gamma=0$$

Η f παραγωγίσιμη με $f'(x)=2x+\beta$ οπότε:

$f'(1)=2\Leftrightarrow 2+\beta=2\Leftrightarrow\beta=0$ άρα και $\gamma=0$ οπότε $f(x)=x^2$

Δ3. Η συνάρτηση $f(x)=x^2$ έχει ελάχιστο στη θέση $x=0$ με τιμή $f(0)=0$ ενώ η συνάρτηση g έχει ελάχιστο στη θέση $x=\alpha$ με $\alpha>0$ με τιμή $g(\alpha)=0$

Για να δείξουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,\alpha)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)\Leftrightarrow h(x)=x^2-g(x)$

Η h συνεχής στο διάστημα $[0,\alpha]$

$h(0) = -g(0) < 0$

διότι εφόσον η g έχει ελάχιστο $g(x) \geq g(\alpha)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δηλαδή $g(x) \geq 0$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = \alpha$ άρα $g(0) > 0 \Leftrightarrow -g(0) < 0$

$h(\alpha) = \alpha^2 - g(\alpha) = \alpha^2 > 0$ εφόσον $\alpha \neq 0$

Δηλαδή $h(0) \cdot h(\alpha) < 0$ άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, \alpha)$ ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0)$

Δ4. Έχουμε ότι $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(g(x_0)+h) - g(g(x_0)-h)}{2h} = g'(\eta\mu g(x_0))$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{g(g(x_0)+h) + g(g(x_0)) - g(g(x_0)) - g(g(x_0)-h)}{2h} = g'(\eta\mu g(x_0))$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \left[\frac{g(g(x_0)+h) - g(g(x_0))}{2h} + \frac{g(g(x_0)-h) - g(g(x_0))}{2h} \right] = g'(\eta\mu(g(x_0)))$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \left[\frac{g(g(x_0)+h) - g(g(x_0))}{h} + \frac{g(g(x_0)-h) - g(g(x_0))}{h} \right] = g'(\eta\mu(g(x_0))) \quad (A)$$

Για το $\dfrac{g(g(x_0)+h) - g(g(x_0))}{h}$ θέτουμε $u = g(x_0) + h$ άρα

$$\lim_{u \to g(x_0)} \frac{g(u) - g(g(x_0))}{u - g(x_0)} = g'(g(x_0))$$

Για το $\dfrac{g(g(x_0)-h) - g(g(x_0))}{h}$ θέτουμε $u = g(x_0) - h$ άρα

$$\lim_{u \to g(x_0)} \frac{g(u) - g(g(x_0))}{-u + g(x_0)} = -\lim_{u \to g(x_0)} \frac{g(u) - g(g(x_0))}{u - g(x_0)} = -g'(g(x_0))$$

Άρα η σχέση (A) γίνεται

$$\frac{1}{2}\left(g'\left(g\left(x_0\right)\right)+g'\left(g\left(x_0\right)\right)\right)=g'\left(\eta\mu g\left(x_0\right)\right)\Leftrightarrow g'\left(g\left(x_0\right)\right)=g'\left(\eta\mu g\left(x_0\right)\right)$$

Αν η συνάρτηση g' είναι αντιστρέψιμη τότε $g\left(x_0\right)=\eta\mu g\left(x_0\right)\Leftrightarrow g\left(x_0\right)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_0^2=0\Leftrightarrow x_0=0$ άτοπο διότι $x_0\in(0,\alpha)$