ΤΑΞΗ: 3η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Παρασκευή 5 Ιανουαρίου 2018
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2$. Έχουμε:

$$f(x+h)-f(x)=\left(x+h\right)^2-x^2=x^2+2xh+h^2-x^2=2xh+h^2$$

και για $h\neq 0$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{2xh+h^2}{h}$. Επομένως:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=2x+0=2x.$$

Α2. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέμε ότι παρουσιάζει: Τοπικό μέγιστο στο $x_1\in A$, όταν $f(x)\leq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1, και τοπικό ελάχιστο στο $x_2\in A$, όταν $f(x)\geq f(x_2)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_2.

Α3.

1. Λ
2. Σ
3. Σ
4. Σ
5. Λ

Α4.

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\nu}=\ell^{\nu}$
2. $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\ell}$
3. $\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
4. $\left(f\left(g(x)\right)\right)'=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$

ΘΕΜΑ Β

Β1. $2x+1\geq 0\Leftrightarrow 2x\geq -1\Leftrightarrow x\geq -\dfrac{1}{2}$, $x\neq 0$. Άρα $A_f=\left[-\dfrac{1}{2},0\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

$$f'(x)=\left[\eta\mu\left(x^2+9\right)\right]'-\left[\sqrt{2x+1}\right]'-\left(\frac{2}{x}\right)'=\sigma\upsilon\nu\left(x^2+9\right)\cdot\left(x^2+9\right)'-\frac{1}{2\sqrt{2x+1}}\cdot(2x+1)'-\left(-\frac{2}{x^2}\right)=$$

$$=2x\cdot\sigma\upsilon\nu\left(x^2+9\right)-\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}+\frac{2}{x^2}=2x\cdot\sigma\upsilon\nu\left(x^2+9\right)-\frac{1}{\sqrt{2x+1}}+\frac{2}{x^2}$$

Β2. $$f'(x)=\left[\frac{x^2}{x^2+1}\right]'=\frac{\left(x^2\right)'\cdot\left(x^2+1\right)-x^2\cdot\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x\cdot\left(x^2+1\right)-x^2\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{2x^3+2x-2x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f''(x)=\left[\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\right]'=\frac{(2x)'\cdot\left(x^2+1\right)^2-2x\cdot\left[\left(x^2+1\right)^2\right]'}{\left[\left(x^2+1\right)^2\right]^2}=\frac{2\cdot\left(x^2+1\right)^2-2x\cdot 2\left(x^2+1\right)\cdot\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^4}=$$

$$=\frac{2\cdot\left(x^2+1\right)^2-4x\cdot\left(x^2+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{\left(x^2+1\right)\left[2\left(x^2+1\right)-8x^2\right]}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{2x^2+2-8x^2}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{-6x^2+2}{\left(x^2+1\right)^3}$$

Β3. $f'(x)=\left(\alpha x^3\right)'-\left(2x^2\right)'+\left(6x\right)'-\left(2\right)'=3\alpha x^2-4x+6$

Η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από το $A\left(-1,4\right)$. Άρα

$$f'\left(-1\right)=4\Leftrightarrow 3\alpha\left(-1\right)^2-4\left(-1\right)+6=4\Leftrightarrow 3\alpha+4+6=4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha=4-6-4\Leftrightarrow 3\alpha=-6\Leftrightarrow \alpha=\frac{-6}{3}=-2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θα πρέπει $x\ge 0$.

Επίσης, θα πρέπει $x^2-1\ne 0\Leftrightarrow x^2\ne 1\Leftrightarrow x\ne \pm 1$.

Άρα $A_g=\left[0,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$

Γ2. $$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x\sqrt{x}-1}{x^2-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\left(x\sqrt{x}-1\right)\left(x\sqrt{x}+1\right)}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x\sqrt{x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x\sqrt{x}\right)^2-1^2}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x\sqrt{x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2+x+1\right)}{\left(x+1\right)\left(x\sqrt{x}+1\right)}=\frac{1^2+1+1}{\left(1+1\right)\left(1\sqrt{1}+1\right)}=\frac{3}{2\cdot 2}=\frac{3}{4}.$$

Γ3. $\lambda=f'(4)$

Για x = 4 έχουμε:

$$f'(x)=\left(\frac{x\sqrt{x}-1}{x^2-1}\right)'=\frac{\left(x\sqrt{x}-1\right)'\cdot\left(x^2-1\right)-\left(x\sqrt{x}-1\right)\cdot\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(x\sqrt{x}\right)'\cdot\left(x^2-1\right)-\left(x\sqrt{x}-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{\left[\left(x\right)'\sqrt{x}+x\left(\sqrt{x}\right)'\right]\cdot\left(x^2-1\right)-\left(x\sqrt{x}-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=$$

$$=\frac{\left[\sqrt{x}+x\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]\cdot\left(x^2-1\right)-\left(x\sqrt{x}-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$f'(4)=\frac{\left[\sqrt{4}+4\frac{1}{2\sqrt{4}}\right]\cdot\left(4^2-1\right)-\left(4\sqrt{4}-1\right)\cdot 2\cdot 4}{\left(4^2-1\right)^2}=\frac{\left[2+\frac{4}{2\cdot 2}\right]\cdot(16-1)-(4\cdot 2-1)\cdot 8}{(16-1)^2}=$$

$$=\frac{(2+1)\cdot 15-7\cdot 8}{15^2}=\frac{45-56}{225}=-\frac{11}{225}$$

Γ4. Είναι $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$ (από Γ2 ερώτημα).

Επίσης:

$$f(1)=225\cdot\lambda\cdot 1+\frac{47}{4}=225\cdot\left(-\frac{11}{225}\right)+\frac{47}{4}=-11+\frac{47}{4}=-\frac{44}{4}+\frac{47}{4}=\frac{3}{4}$$

Παρατηρώ ότι $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$. Άρα η f είναι συνεχής στο x = 1.

Γ5. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η: $y=\lambda x+\beta$, όπου $\lambda=-\frac{11}{225}$,

$$y=f(4)=\frac{4\sqrt{4}-1}{4^2-1}=\frac{8-1}{16-1}=\frac{7}{15}$$

$$y=\lambda x+\beta \Leftrightarrow \frac{7}{15}=-\frac{11}{225}\cdot 4+\beta \Leftrightarrow \beta=\frac{7}{15}+\frac{44}{225}\Leftrightarrow \beta=\frac{105+44}{225}=\frac{149}{225}$$

Άρα η εξίσωση είναι η: $y=-\frac{11}{225}x+\frac{149}{225}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x)=\left(x^2+1\right)'\cdot\left(\kappa x+2\right)+\left(x^2+1\right)\cdot\left(\kappa x+2\right)'=2x\cdot\left(\kappa x+2\right)+\left(x^2+1\right)\cdot\kappa=$

$=2\kappa x^2+4x+\kappa x^2+\kappa=3\kappa x^2+4x+\kappa$.

Δ2. $f(0)=\left(0^2+1\right)\cdot\left(\kappa\cdot 0+2\right)=1\cdot 2=2$

$f(1)=\left(1^2+1\right)\cdot\left(\kappa\cdot 1+2\right)=2\cdot\left(\kappa+2\right)=2\kappa+4$

$f'(-1)=3\kappa\left(-1\right)^2+4\cdot\left(-1\right)+\kappa=3\kappa-4+\kappa=4\kappa-4$

$f'(1)=3\kappa\cdot 1^2+4\cdot 1+\kappa=3\kappa+4+\kappa=4\kappa+4$

$2f(0)+f'(-1)=f(1)+f'(1)\Leftrightarrow 2\cdot 2+4\kappa-4=2\kappa+4+4\kappa+4\Leftrightarrow$

$4+4\kappa-4=6\kappa+8\Leftrightarrow 4\kappa-6\kappa=8\Leftrightarrow -2\kappa=8\Leftrightarrow \kappa=-4$

Δ3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)+10x^2+2}{(\kappa+5)x^2-(-7-2\kappa)x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3\cdot(-4)x^2+4x-4+10x^2+2}{(-4+5)x^2-(-7-2(-4))x}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-12x^2+4x+10x^2-2}{x^2-(-7+8)x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-2x^2+4x-2}{x^2-x}$ (Απροσδιόριστη Μορφή)

<u>Παραγοντοποίηση Αριθμητή:</u> $-2x^2+4x-2=-2\left(x-1\right)\left(x-1\right)$, αφού η εξίσωση $-2x^2+4x-2=0$ έχει διπλή ρίζα την $x=1$.

<u>Παραγοντοποίηση Παρονομαστή:</u> $x^2-x=x\left(x-1\right)$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-2x^2+4x-2}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-2\left(x-1\right)\left(x-1\right)}{x\left(x-1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-2\left(x-1\right)}{x}=\dfrac{-2\left(1-1\right)}{1}=\dfrac{0}{1}=0$

.

Δ4. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως:

$2017<2018 \xrightarrow{\text{Η f είναι γν.φθίνουσα}} f(2017)>f(2018)$.

$\dfrac{1}{2018}<\dfrac{1}{2017} \xrightarrow{\text{Η f είναι γν.φθίνουσα}} f\left(\dfrac{1}{2018}\right)>f\left(\dfrac{1}{2017}\right)$.