**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2018**
**Α΄ ΦΑΣΗ**

**Ε_3.Μλ2Θ(α)**

**ΤΑΞΗ:** **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
**ΜΑΘΗΜΑ:** **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**Ημερομηνία: Παρασκευή 5 Ιανουαρίου 2018**
**Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**

---

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 43

**Α2.** Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ είναι $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

**Α3.** **(α) ΣΩΣΤΟ (β) ΣΩΣΤΟ (γ) ΛΑΘΟΣ (δ) ΛΑΘΟΣ (ε) ΣΩΣΤΟ**

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** Τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v}$ είναι αντίστοιχα

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + \kappa^2} \Leftrightarrow |\vec{u}| = \sqrt{3 + \kappa^2}$$

και

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} \Leftrightarrow |\vec{u}| = \sqrt{12} \Leftrightarrow |\vec{u}| = 2\sqrt{3}$$

Εφόσον έχουν ίσα μέτρα θα ισχύει $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ επομένως

$$\sqrt{3 + \kappa^2} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 3 + \kappa^2 = 12 \Leftrightarrow \kappa^2 = 9 \overset{\kappa > 0}{\Leftrightarrow} \kappa = 3$$

**Β2.** Για $\kappa = 3$ έχουμε $\vec{u} = \left(\sqrt{3}, 3\right)$ ενώ $\vec{v} = \left(3, -\sqrt{3}\right)$

Το εσωτερικό τους γινόμενο είναι:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\sqrt{3}, 3\right) \cdot \left(3, -\sqrt{3}\right) = 3 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{3} = 0$$

Επομένως τα διανύσματα είναι κάθετα.

**Β3.** Το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} + \vec{v}$ μπορεί να βρεθεί με δύο τρόπους

***<u>Α-τρόπος</u>***

$$\left|\vec{u} + \vec{v}\right|^2 = \left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2 = \vec{u}^{\,2} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^{\,2} = \left|\vec{u}\right|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \left|\vec{v}\right|^2 \underset{\left|\vec{u}\right| = \left|\vec{v}\right|}{\overset{\vec{u}\cdot\vec{v}=0}{=}} 2\left|\vec{v}\right|^2 = 2\left(\sqrt{12}\right)^2 = 24$$

Άρα $\left|\vec{u} + \vec{v}\right| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

***<u>Β-τρόπος</u>***

Βρίσκουμε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} + \vec{v}$

$$\vec{u} + \vec{v} = \left(\sqrt{3}, 3\right) + \left(3, -\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{3} + 3, 3 - \sqrt{3}\right)$$

$$\left|\vec{u} + \vec{v}\right| = \sqrt{\left(3 + \sqrt{3}\right)^2 + \left(3 - \sqrt{3}\right)2} = \sqrt{3 + 6\sqrt{3} + 3 + 9 - 6\sqrt{3} + 3} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

**Β4.** $$\text{συν}\left(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}\right) = \frac{\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \cdot \vec{u}}{\left|\vec{u} + \vec{v}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|} = \frac{\vec{u}^{\,2} + \vec{v} \cdot \vec{u}}{\left|\vec{u} + \vec{v}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|} = \frac{\left|\vec{u}\right|^2 + \vec{v} \cdot \vec{u}}{\left|\vec{u} + \vec{v}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|} = \frac{12}{2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Επομένως η γωνία των διανυσμάτων είναι $45^\circ$ ή $\frac{\pi}{4}\text{rad}$.

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $AB$ είναι:

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{2-1} = 2$$

Επομένως η εξίσωση της ευθείας $AB$ είναι:

$$\varepsilon_{AB} : y - 1 = 2(x-1) \Leftrightarrow y = 2x - 1$$

**Γ2.**

**(i)** Οι συντεταγμένες του μέσου $M$ της πλευράς $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι

$$x_M = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} = \frac{1+5}{2} = 3 \text{ και } y_M = \frac{y_A + y_\Gamma}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$$

Επομένως $M(3,2)$.

**(ii)** Η μεσοκάθετος ευθεία $(\varepsilon)$ της πλευράς $A\Gamma$ διέρχεται από το μέσο $M$ και τέμνει την $A\Gamma$ κάθετα επομένως $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{A\Gamma} = -1$

$$\lambda_{A\Gamma} = \frac{y_\Gamma - y_A}{x_\Gamma - x_A} = \frac{3-1}{5-1} = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{A\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -2$$

Άρα η $(\varepsilon)$ διέρχεται από το $M(3,2)$ και έχει κλίση $\lambda_\varepsilon = -2$ επομένως έχει εξίσωση $y - 2 = -2(x-3) \Leftrightarrow y - 2 = -2x + 6 \Leftrightarrow y = -2x + 8$

**Γ3.** Έστω $\Delta(x,y)$ εφόσον $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο θα ισχύει:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (2-1, 3-1) = (1,2)$$

$$\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (x_\Gamma - x_\Delta, y_\Gamma - y_\Delta) = (5-x, 3-y)$$

Άρα

$$\begin{cases} 5 - x = 1 \\ 3 - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \text{ οπότε } \Delta(4,1)$$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.**

**(α)** Η $(\varepsilon)\ y=|\vec{\alpha}|x+|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,2)$ επομένως $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=2$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B\left(-\frac{|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|},0\right)$ ή $B\left(-\frac{2}{|\vec{\alpha}|},0\right)$ το οποίο προκύπτει θέτοντας $y=0$ στην εξίσωση της $(\varepsilon)$.

Εφόσον το τρίγωνο είναι ισοσκελές ισχύει:

$$(OA)=(OB)\Leftrightarrow |y_A|=|x_B|\Leftrightarrow 2=\frac{2}{|\vec{\alpha}|}\Leftrightarrow |\vec{\alpha}|=1$$

**Β-τρόπος**

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε) είναι θετικός επομένως η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ είναι οξεία και επειδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές θα είναι η γωνία $45^\circ$ επομένως $\lambda_\varepsilon=\varepsilon\varphi 45^\circ\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|=1$

**(β)** Εφόσον $\vec{\beta}=\left(1,|\vec{\beta}|-1\right)$ τότε

$$|\vec{\beta}|=\sqrt{1^2+\left(|\vec{\beta}|-1\right)^2}\Leftrightarrow|\vec{\beta}|=\sqrt{1+|\vec{\beta}|^2-2|\vec{\beta}|+1}\Leftrightarrow|\vec{\beta}|^2=2+|\vec{\beta}|^2-2|\vec{\beta}|\Leftrightarrow|\vec{\beta}|=1$$

**Δ2.** Από τη σχέση $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=2$ έχουμε διαδοχικά:

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=2^2\Leftrightarrow\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=4\Leftrightarrow\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=4\Leftrightarrow 1+2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)+1=4$$

$$\Leftrightarrow 2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=2\Leftrightarrow|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=1\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=1$$

Άρα $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=0^\circ$ δηλαδή τα διανύσματα είναι ομόρροπα και επειδή έχουν ίσα μέτρα θα είναι ίσα.

**Δ3.** Από τις εξισώσεις των ευθειών $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ έχουμε:

**<u>Α τρόπος</u>**

$$\varepsilon_1: y = 2x - \lambda + 2 \ (1) \quad \varepsilon_2: y = \lambda x - \lambda^2 + \lambda + 2 \ (2)$$

Από τις $(1),(2)$ προκύπτει :

$$\lambda x - \lambda^2 + \lambda + 2 = 2x - \lambda + 2 \Leftrightarrow \lambda x - 2x = \lambda^2 - 2\lambda \Leftrightarrow (\lambda - 2)x = \lambda(\lambda - 2)$$

Επειδή $\lambda \neq 2$ από την τελευταία εξίσωση προκύπτει $x = \lambda$ οπότε αντικαθιστώντας στην $(1)$ έχουμε : $y = 2\lambda - \lambda + 2 \Leftrightarrow y = \lambda + 2$

Επομένως το κοινό τους σημείο είναι $M(\lambda, \lambda + 2)$

Η ευθεία $(\varepsilon)$ έχει εξίσωση $y = x + 2$ που προφανώς το σημείο Μ ανήκει σε αυτήν για κάθε $\lambda \neq 2$.

**<u>Β τρόπος</u>**

$\varepsilon_1: y = 2x - \lambda + 2 \Leftrightarrow 2x - y = \lambda - 2$

$\varepsilon_2: y = \lambda x - \lambda^2 + \lambda + 2 \Leftrightarrow \lambda x - y = \lambda^2 - \lambda - 2$

Θα λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x - y = \lambda - 2 \\ \lambda x - y = \lambda^2 - \lambda - 2 \end{cases}$$ με τη μέθοδο των οριζουσών

$D = \begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + \lambda = \lambda - 2 \neq 0$ **(από υπόθεση)**

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ \lambda^2 - \lambda - 2 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda + 2 + \lambda^2 - \lambda - 2 = \lambda(\lambda - 2)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & \lambda - 2 \\ \lambda & \lambda^2 - \lambda - 2 \end{vmatrix} = 2\lambda^2 - 2\lambda - 4 - \lambda^2 + 2\lambda = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

Εφόσον $D \neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση, δηλαδή οι ευθείες τέμνονται.

Άρα $x = \dfrac{D_x}{D} \Leftrightarrow x = \lambda$ και $y = \dfrac{D_y}{D} \Leftrightarrow y = \lambda + 2$

Επομένως το κοινό τους σημείο είναι $M(\lambda, \lambda+2)$

Η ευθεία $(\varepsilon)$ έχει εξίσωση $y = x+2$ που προφανώς το σημείο Μ ανήκει σε αυτήν για κάθε $\lambda \neq 2$