ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 7 Ιανουαρίου 2017
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 106
Α2. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελίδα 95
Α3. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελίδα 33
Α5. (i) Σωστό (ii) Λάθος (iii) Λάθος (iv) Λάθος (v) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow 2e^{x_1} < 2e^{x_2} \Rightarrow 2e^{x_1}+1 < 2e^{x_2}+1 \Rightarrow \frac{1}{2e^{x_1}+1} > \frac{1}{2e^{x_2}+1}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2e^{x_1}+1} < -\frac{1}{2e^{x_2}+1} \Rightarrow 1-\frac{1}{2e^{x_1}+1} < 1-\frac{1}{2e^{x_2}+1} \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Η g συνεχής στο $A_g = \mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και γνησίως αύξουσα.

Επομένως το σύνολο τιμών της είναι :

$$g(A_g) = \left(\lim_{x\to-\infty} g(x), \lim_{x\to+\infty} g(x)\right) = (-1,1)$$

Διότι:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{2e^x+1}\right) = 1-\frac{2}{2\cdot 0+1} = -1$$

Εφόσον $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{2e^x+1}\right) = 1-\lim_{x\to+\infty} 2\frac{1}{e^x}\frac{1}{\left(2+\frac{1}{e^x}\right)} = 1-2\cdot 0\frac{1}{2+0} = 1$$

Εφόσον $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0$

Β2. Εφόσον η g είναι γνησίως αύξουσα είναι και $1-1$ επομένως αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της g^{-1} είναι το σύνολο τιμών της g, δηλαδή

$$A_{g^{-1}} = (-1,1)$$

Για την εύρεση της αντίστροφης έχουμε

$$g(x) = y \Leftrightarrow 1-\frac{2}{2e^x+1} = y \Leftrightarrow 1-y = \frac{2}{2e^x+1} \overset{y\in(-1,1)}{\Leftrightarrow} (1-y)(2e^x+1) = 2$$

$$\Leftrightarrow 2e^x+1-2e^x y - y = 2 \Leftrightarrow e^x(2-2y) = y+1$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{y+1}{2-2y} \overset{y\in(-1,1)}{\Leftrightarrow} x = \ln\left(\frac{y+1}{2-2y}\right)$$

Επομένως $g^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+1}{2-2x}\right)$ με $x\in(-1,1)$

Β3. Για να ορίζεται η $f\circ f$ πρέπει

$$x\in A_f \text{ και } f(x)\in A_f$$

Δηλαδή

$$x\neq 2$$

και

$$\frac{2x+6}{x-2}\neq 2 \Leftrightarrow 2x+6\neq 2x-4 \Leftrightarrow 0x\neq -10, \text{ ισχύει για κάθε } x\neq 2$$

Επομένως $A_{f\circ f} = (-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

Και ο τύπος της είναι :

$$(f\circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{2f(x)+6}{f(x)-2} = \frac{2\frac{2x+6}{x-2}+6}{\frac{2x+6}{x-2}-2} = \frac{\frac{4x+12+6x-12}{x-2}}{\frac{2x+6-2x+4}{x-2}} = \frac{10x}{10} = x$$

Β4. Η g συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και γνησίως αύξουσα επομένως :

$$g([\alpha,\beta]) = [g(\alpha), g(\beta)]$$

Άρα ισχύει:

$$\alpha < x_1 < \beta \overset{g:1}{\Leftrightarrow} g(\alpha) < g(x_1) < g(\beta)$$
$$\alpha < x_2 < \beta \overset{g:1}{\Leftrightarrow} g(\alpha) < g(x_2) < g(\beta)$$
$$\alpha < x_3 < \beta \overset{g:1}{\Leftrightarrow} g(\alpha) < g(x_3) < g(\beta)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει :

$$3g(\alpha) < g(x_1)+g(x_2)+g(x_3) < 3g(\beta) \Leftrightarrow g(\alpha) < \frac{g(x_1)+g(x_2)+g(x_3)}{3} < g(\beta)$$

Ο αριθμός $\frac{g(x_1)+g(x_2)+g(x_3)}{3}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της g άρα υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο

$$g(x_0) = \frac{g(x_1)+g(x_2)+g(x_3)}{3}$$

Το x_0 μοναδικό διότι η g είναι γνησίως αύξουσα

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $f^2(2)-25 \neq 0 \Leftrightarrow f^2(2) \neq 25 \Leftrightarrow \begin{cases} f(2)\neq 5 \\ \text{και} \\ f(2)\neq -5 \end{cases}$ τότε το όριο γίνεται :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(f^2(2)-25)x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}(f^2(2)-25)\cdot x$$

$$=(f^2(2)-25)\cdot(+\infty) = \begin{cases} +\infty, & f(2)\in(-\infty,-5)\cup(5,+\infty) \\ & \text{ή} \\ -\infty, & f(2)\in(-5,5) \end{cases}$$

Σε κάθε περίπτωση είναι άτοπο διότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(f^2(2)-25)x^3+f(2)x^2-3x+9}{x^2+2x-6}=5$$

- Αν $f^2(2)-25=0 \Leftrightarrow f^2(2)=25 \Leftrightarrow \begin{cases} f(2)=5 \\ \text{ή} \\ f(2)=-5 \end{cases}$

- Αν $f(2)=5$ το όριο γίνεται :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2-3x+9}{x^2+2x-6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{x^2}=5$$

- Αν $f(2)=-5$ το όριο γίνεται :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x^2-3x+9}{x^2+2x-6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x^2}{x^2}=-5$$

Επομένως $f(2)=5$

Για το όριο $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+3h)-5}{h}=9 \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+3h)-f(2)}{h}=9 \quad (1)$

<u>Α τρόπος</u>

θέτουμε $u=2+3h \Leftrightarrow h=\dfrac{u-2}{3}$ άρα $u_0=\lim\limits_{h\to0}(2+3h) \Leftrightarrow u_0=2$

Επομένως η (1) γίνεται

$$\lim_{u\to2}\frac{f(u)-f(2)}{\frac{u-2}{3}}=9 \Leftrightarrow 3\lim_{u\to2}\frac{f(u)-f(2)}{u-2}=9$$

$$\Leftrightarrow \lim_{u\to2}\frac{f(u)-f(2)}{u-2}=3 \quad \Leftrightarrow f'(2)=3$$

<u>Β τρόπος</u>

θέτουμε $u=3h \Leftrightarrow h=\dfrac{u}{3}$ άρα $u_0=\lim\limits_{h\to0}3h \Leftrightarrow u_0=0$

Επομένως η (1) γίνεται

$$\lim_{u\to0}\frac{f(2+u)-f(2)}{\frac{u}{3}}=9 \Leftrightarrow 3\lim_{u\to0}\frac{f(2+u)-f(2)}{u}=9$$

$$\Leftrightarrow \lim_{u\to0}\frac{f(2+u)-f(2)}{u}=3 \quad \Leftrightarrow f'(2)=3$$

Γ2. Για $x=2$ η σχέση $(x-2)\cdot f(x)=\kappa x^2+\lambda x+2$

Γίνεται:

$$0=4\kappa+2\lambda+2 \Leftrightarrow \lambda=-2\kappa-1 \quad (2)$$

Για $x\neq 2$ έχουμε

$$f(x)=\frac{\kappa x^2+\lambda x+2}{x-2} \quad (3)$$

Και επειδή η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $x_0=2$ οπότε θα ισχύει :

$$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2) \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \lim_{x\to 2}\frac{\kappa x^2+\lambda x+2}{x-2}=5$$

Αντικαθιστώντας την (2) στην (3) παίρνουμε :

$$\lim_{x\to 2}\frac{\kappa x^2+(-2\kappa-1)x+2}{x-2}=5 \Leftrightarrow \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(\kappa x-1)}{x-2}=5$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 2}(\kappa x-1)=5 \Leftrightarrow 2\kappa-1=5 \Leftrightarrow \kappa=3$$

Επομένως για $\kappa=3$ έχουμε από (2) ότι: $\lambda=-7$

Γ3. **(i)** Για $\kappa=3$ και $\lambda=-7$ έχουμε

$$(x-2)\cdot f(x)=3x^2-7x+2 \overset{x\neq 2}{\Leftrightarrow} f(x)=\frac{3x^2-7x+2}{x-2}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{(x-2)(3x-1)}{x-2} \Leftrightarrow f(x)=3x-1$$

Επομένως $f(x)=\begin{cases}3x-1, & x\neq 2\\ 5, & x=2\end{cases}$ και επειδή η f συνεχής στο $x=2$ άρα ο τύπος της f είναι :

$$f(x)=3x-1, x\in\mathbb{R}$$

(ii) Έστω $A(x_0, g(x_0))$ σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με $x_0\in(-1,+\infty)$

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_g στο A είναι:

$$y-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y=g'(x_0)\cdot x+g(x_0)-x_0\cdot g'(x_0)$$

Για να είναι η γραφική παράσταση της f με $f(x)=3x-1$ εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g πρέπει το σύστημα

$$\begin{cases} g'(x_0)=3 \\ \text{και} \\ g(x_0)-x_0\cdot g'(x_0)=-1 \end{cases} \text{ να έχει λύση .}$$

Η g παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ με $g'(x)=\dfrac{1}{x+1}+2$

Επομένως

$$g'(x_0)=3 \Leftrightarrow \frac{1}{x_0+1}+2=3 \Leftrightarrow \frac{1}{x_0+1}=1 \Leftrightarrow x_0+1=1 \Leftrightarrow x_0=0$$

Για $x_0=0$ η εξίσωση $g(x_0)-x_0\cdot g'(x_0)=-1$ επαληθεύεται διότι

$$g(0)-0\cdot g'(0)=-1 \Leftrightarrow \ln 1+2\cdot 0-1=-1 \Leftrightarrow -1=-1$$

Άρα η $f(x)=3x-1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g στο σημείο $A(0,g(0))$ δηλαδή στο σημείο $A(0,-1)$

Γ4.

$$h(x)=0 \Leftrightarrow x+1-e^{1-2x}=0 \Leftrightarrow x+1=e^{1-2x} \Leftrightarrow x+1=\frac{e}{e^{2x}}$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}(x+1)=e \Leftrightarrow \ln\left(e^{2x}(x+1)\right)=\ln e \Leftrightarrow \ln e^{2x}+\ln(x+1)=1$$

$$\Leftrightarrow 2x+\ln(x+1)=1 \Leftrightarrow 2x+\ln(x+1)-1=0 \Leftrightarrow g(x)=0$$

Επομένως οι εξισώσεις $h(x)=0$ και $g(x)=0$, $x\in(-1,+\infty)$ είναι ισοδύναμες δηλαδή έχουν τις ίδιες λύσεις .

Για κάθε $x_1,x_2\in(-1,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε

$$x_1<x_2 \Rightarrow x_1+1<x_2+1 \Rightarrow \ln(x_1+1)<\ln(x_2+1)$$

$$x_1<x_2 \Rightarrow 2x_1<2x_2 \Rightarrow 2x_1-1<2x_2-1$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει $g(x_1)<g(x_2)$ επομένως η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $A=(-1,+\infty)$

Η g συνεχής στο Α και γνησίως αύξουσα επομένως το σύνολο τιμών της είναι

$$g(A)=\left(\lim_{x\to -1^+} g(x), \lim_{x\to+\infty} g(x)\right)=(-\infty,+\infty) \text{ διότι :}$$

- $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(\ln(x+1)+2x-1\right)=(-\infty)+(-3)=-\infty$

Για το $\lim\limits_{x\to -1^-}\ln(x+1)$ θέτουμε $u=x+1$ επομένως όταν $u_0=\lim\limits_{x\to -1^+}(x+1)=0^+$

Επομένως $\lim\limits_{x\to -1^+}\ln(x+1)=\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$ ενώ $\lim\limits_{x\to -1^+}(2x-1)=-3$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x+1)+2x-1\right) = (+\infty)+(+\infty) = +\infty$

Ο αριθμός 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της g άρα υπάρχει $x_0 \in (-1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$ το οποίο είναι μοναδικό διότι η g είναι γνησίως αύξουσα, επομένως και $h(x_0)=0$.

Επομένως η C_h τέμνει την C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ σε μοναδικό σημείο $(x_0, 0)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = \alpha \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x} = \alpha$

Για $x>0$ η σχέση $f^3(x)+xf^2(x)\le 2\eta\mu^3 x$ γίνεται :

$$\frac{f^3(x)}{x^3}+\frac{f^2(x)}{x^2}\le\frac{2\eta\mu^3 x}{x^3} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2\le 2\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3$$

Επομένως: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^3=\alpha^3$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^2=\alpha^2$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^3=1^3=1$

Άρα: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^3+\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^2\right)\le \lim\limits_{x\to 0^+} 2\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^3 \Leftrightarrow \alpha^3+\alpha^2\le 2 \Leftrightarrow \alpha^3+\alpha^2-2\le 0 \quad (2)$

Η σχέση (2) γράφεται

$$(\alpha-1)(\alpha^2+2\alpha+2)\le 0 \Leftrightarrow \alpha-1\le 0 \Leftrightarrow \alpha\le 1$$

Για $x<0$ η σχέση $f^3(x)+xf^2(x)\le 2\eta\mu^3 x$ γίνεται :

$$\frac{f^3(x)}{x^3}+\frac{f^2(x)}{x^2}\ge\frac{2\eta\mu^3 x}{x^3} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2\ge 2\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3$$

Επομένως: $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^3=\alpha^3$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^2=\alpha^2$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^3=1^3=1$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2\right)\ge \lim_{x\to 0^-} 2\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3 \Leftrightarrow \alpha^3+\alpha^2\ge 2 \Rightarrow \alpha^3+\alpha^2-2\ge 0 \quad (3)$$

Η σχέση (3) γράφεται $(\alpha-1)(\alpha^2+2\alpha+2)\ge 0 \Leftrightarrow \alpha-1\ge 0 \Leftrightarrow \alpha\ge 1$

Και επειδή το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\alpha$ και το όριο είναι μοναδικό τότε $\alpha=1$.

Δ2. Για $\alpha=1$ η σχέση $\alpha e^{g(x)}+\sqrt{g(x)}=x+\alpha$
γίνεται:

$$e^{g(x)}+\sqrt{g(x)}=x+1, x\in(0,+\infty)$$

<u>Α τρόπος</u>

Έστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ ώστε $g(x_1)\geq g(x_2)$ τότε

$$e^{g(x_1)}\geq e^{g(x_2)} \text{ και } \sqrt{g(x_1)}\geq\sqrt{g(x_2)} \text{ επομένως}$$

$$e^{g(x_1)}+\sqrt{g(x_1)}\geq e^{g(x_2)}+\sqrt{g(x_2)}\Leftrightarrow x_1+1\geq x_2+1\Leftrightarrow x_1\geq x_2 \text{ άτοπο.}$$

Άρα $g(x_1)<g(x_2)$ επομένως η g γνησίως αύξουσα .

<u>Β τρόπος</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^x+\sqrt{x}-1, x\in(0,+\infty)$

Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε :

$$x_1<x_2\Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2}\ (\alpha)$$

και

$$x_1<x_2\Rightarrow\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}\Rightarrow\sqrt{x_1}-1<\sqrt{x_2}-1\quad(\beta)$$

Με πρόσθεση των (α) και (β) προκύπτει $h(x_1)<h(x_2)$ επομένως η h γνησίως αύξουσα.

Το σύνολο τιμών της h είναι : $h((0,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to0}h(x),\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)\right)=(0,+\infty)$

$$e^{g(x)}+\sqrt{g(x)}-1=x\Leftrightarrow h(g(x))=x, x\in(0,+\infty)$$

$$x_1<x_2\Rightarrow h(g(x_1))<h(g(x_2))\overset{h:1}{\Rightarrow}g(x_1)<g(x_2)$$

Άρα η g γνησίως αύξουσα .

Εφόσον η g γνησίως αύξουσα είναι και 1-1 οπότε αντιστρέφεται

Θέτω $g(x)=y\Leftrightarrow x=g^{-1}(y), y>0$ άρα :

$$e^{g(x)}+\sqrt{g(x)}=x+1\Leftrightarrow e^y+\sqrt{y}=g^{-1}(x)+1\Leftrightarrow e^y+\sqrt{y}-1=g^{-1}(y)$$

Επομένως η αντίστροφη της g είναι :

$$g^{-1}(x)=e^x+\sqrt{x}-1, x>0$$

Δ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης της g στο σημείο της με τετμημένη $x_0=e$ είναι

$$y-g(e)=g'(e)(x-e)\ \ (A)$$

$g(e)=k \Leftrightarrow e=g^{-1}(k) \Leftrightarrow e=e^{k}+\sqrt{k}-1 \Leftrightarrow k=1$ προφανής ρίζα και επειδή η g^{-1} είναι 1-1 η ρίζα μοναδική.

Παραγωγίζοντας την $e^{g(x)}+\sqrt{g(x)}=x+1$ έχουμε

$$e^{g(x)}g'(x)+\frac{1}{2\sqrt{g(x)}}g'(x)=1$$

Για $x=e$ γίνεται

$$e^{g(e)}g'(e)+\frac{1}{2\sqrt{g(e)}}g'(e)=1 \Leftrightarrow eg'(e)+\frac{1}{2}g'(e)=1 \Leftrightarrow 2eg'(e)+g'(e)=2$$

$$\Leftrightarrow g'(e)(2e+1)=2 \Leftrightarrow g'(e)=\frac{2}{2e+1}$$

Με αντικατάσταση στην (Α) όπου $g(e)=1$ και $g'(e)=\frac{2}{2e+1}$ προκύπτει :

$$y=\frac{2}{2e+1}x+\frac{1}{2e+1}$$

Δ4. Έστω $M\left(x_0,g^{-1}(x_0)\right)$ σημείο της $C_{g^{-1}}$, η εξίσωση της εφαπτομένης στο Μ είναι

$$y-g^{-1}(x_0)=\left(g^{-1}\right)'(x_0)(x-x_0)$$

Για να διέρχεται η εξίσωση από το σημείο $(1,0)$ θα πρέπει να ισχύει

$$0-g^{-1}(x_0)=\left(g^{-1}\right)'(x_0)(1-x_0) \text{ για κάποιο } x_0\in(0,+\infty)$$

$$-e^{x_0}-\sqrt{x_0}+1=\left(e^{x_0}+\frac{1}{2\sqrt{x_0}}\right)(1-x_0)$$

$$\Leftrightarrow -e^{x_0}-\sqrt{x_0}+1=e^{x_0}-x_0e^{x_0}+\frac{1}{2\sqrt{x_0}}-\frac{x_0}{2\sqrt{x_0}}$$

$$\Leftrightarrow -2e^{x_0}+x_0e^{x_0}+1-\sqrt{x_0}+\frac{\sqrt{x_0}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x_0}}=0$$

$$\Leftrightarrow e^{x_0}(x_0-2)+1-\frac{\sqrt{x_0}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x_0}}=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x_0}e^{x_0}(x_0-2)+2\sqrt{x_0}-x_0-1=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = 2\sqrt{x}e^x(x-2) + 2\sqrt{x} - x - 1, x \in (0,+\infty)$$

Η φ συνεχής στο $[1,4]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης

$$\varphi(1) = -2e < 0$$

και

$$\varphi(4) = 2\sqrt{4}e^4(4-2) + 2\sqrt{4} - 4 - 1 = 8e^4 - 1 > 0$$

Δηλαδή

$$\varphi(1)\cdot\varphi(4) < 0$$

Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,4) \subset (0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = 0$