ΤΑΞΗ: **Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**

Ημερομηνία: Τετάρτη 15 Απριλίου 2015
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

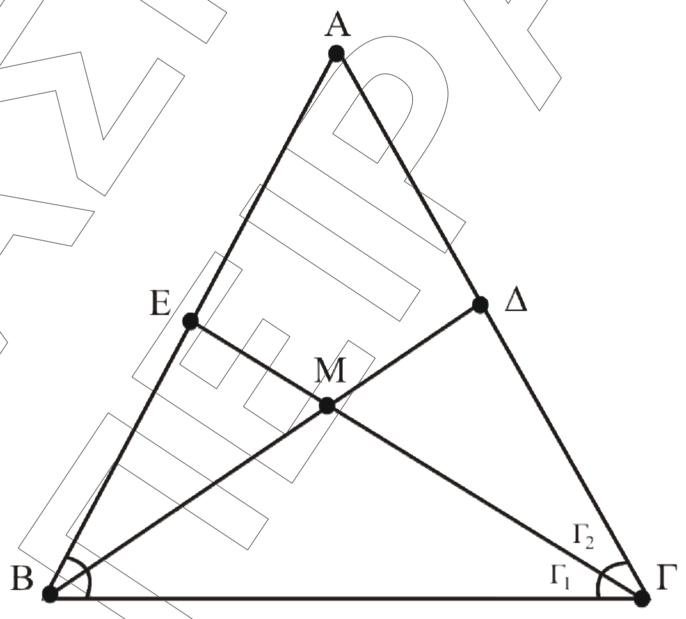
ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 62, Θεώρημα ΙΙ.

Α2. Βλέπε ορισμό σχολικού βιβλίου σελίδα 113.

Α3. **α.→Λ,** **β.→Λ,** **γ.→Σ,** **δ.→Λ,** **ε.→Σ**

ΘΕΜΑ Β



Β1. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές ισχύει:

$\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (1).Επίσης $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \dfrac{\hat{B}}{2}$ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2 = \dfrac{\hat{\Gamma}}{2}$.

Άρα $\hat{B}_1 = \dfrac{\hat{B}}{2} \overset{(1)}{=} \dfrac{\hat{\Gamma}}{2} = \hat{\Gamma}_1$.

Οπότε $M\Gamma = MB$ και έτσι το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές.

Β2. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΜΕ και ΓΜΔ. Αυτά έχουν:

ΜΒ = ΜΓ (λόγω Β1.)

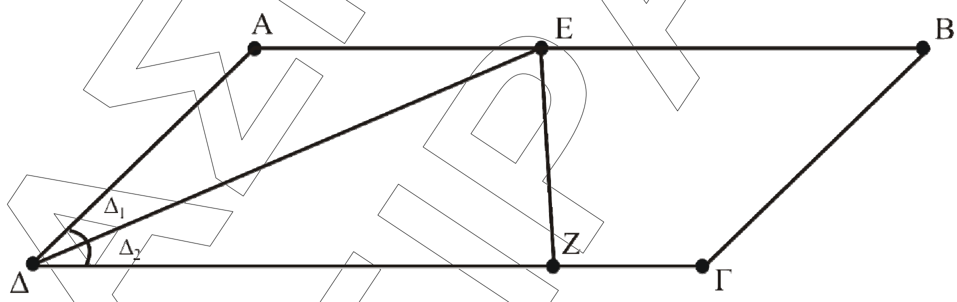
$B\hat{M}E = \Gamma\hat{M}\Delta$ (ως κατακορυφήν)

$\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2$

Από το κριτήριο Γ–Π–Γ τα τρίγωνα είναι ίσα. Οπότε και τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία τους είναι ίσα. Άρα ΜΕ = ΜΔ και ΒΕ = ΓΔ (2). Όμως ΑΒ = ΑΓ (3). Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (3) και (2) έχουμε

$$AB - BE = A\Gamma - \Gamma\Delta \Leftrightarrow AE = A\Delta.$$

ΘΕΜΑ Γ



Γ1. Γνωρίζουμε από υπόθεση ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = \dfrac{\hat{\Delta}}{2}$. (1)

Επίσης ισχύει $\hat{\Delta}_2 = A\hat{E}\Delta$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB και $\Gamma\Delta$ με τέμνουσα τη ΔE). (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι $\hat{\Delta}_1 = A\hat{E}\Delta$.

Άρα $A\Delta = AE$, οπότε το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

Γ2. Από το ερώτημα Γ1 ισχύει $ΑΔ = ΑΕ$.
Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ισχύει ότι $ΑΔ = ΒΓ$.
Άρα $ΑΕ = ΒΓ$.

Όμως το Ε είναι μέσο της ΑΒ οπότε ισχύει $ΑΕ = \frac{ΑΒ}{2}$.

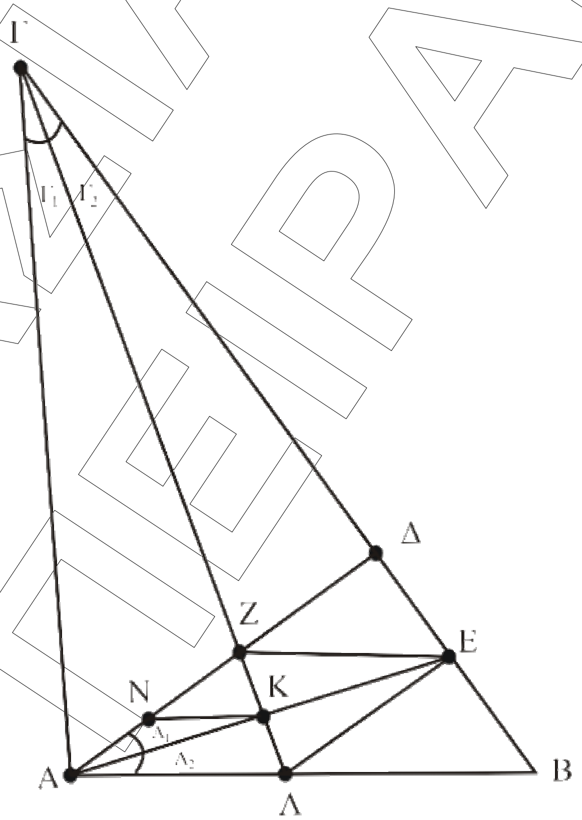
Εντέλει $ΒΓ = \frac{ΑΒ}{2} \Leftrightarrow ΑΒ = 2ΒΓ$.

Γ3. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ισχύει: $\hat{Α} + \hat{Δ} = 180°$

Όμως $\hat{Α} = 2\hat{Δ} \Leftrightarrow 3\hat{Δ} = 180° \Leftrightarrow \hat{Δ} = 60°$. Άρα $\hat{Δ}_2 = \frac{\hat{Δ}}{2} = 30°$.

Έτσι στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΖ ισχύει ότι $ΕΖ = \frac{ΔΕ}{2} \Leftrightarrow ΔΕ = 2ΕΖ$.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>



Δ1.

- Γνωρίζουμε από υπόθεση ότι: $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2 = \frac{\hat{\Gamma}}{2}$ (1) και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\Delta\hat{A}B}{2}$ (2)
- Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\hat{\Gamma} = 90^o - \hat{B}$ (3).
- Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ ισχύει: $\Delta\hat{A}B = 90^\circ - \hat{B}$ (4).

  Από τις σχέσεις (1),(2),(3),(4) έχουμε: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2 = \frac{\hat{\Gamma}}{2}$ (5).
- Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΖΔ ισχύει:

  $\Gamma\hat{Z}\Delta = 90^\circ - \hat{\Gamma}_2 \overset{(5)}{=} 90^\circ - \frac{\Gamma}{2}$.

  Όμως $\Gamma\hat{Z}\Delta = A\hat{Z}K$ (ως κατακορυφήν).

  Άρα $A\hat{Z}K = 90^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$.

  Έτσι στο τρίγωνο $A\hat{Z}K$ ισχύει: $\hat{A}_1 + A\hat{Z}K = \frac{\hat{\Gamma}}{2} + 90^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90^\circ$

  Οπότε $A\hat{K}Z = 90^\circ$. Ώστε $\Gamma K \perp AE$.

Δ2. Στο τρίγωνο ΑΓΕ ισχύει ότι τα ΑΚ,ΑΔ είναι ύψη του.
Οπότε το σημείο Ζ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου.
Έτσι η ΕΖ είναι ο φορέας του τρίτου ύψους του.
Άρα $EZ \perp A\Gamma$. Όμως $AB \perp A\Gamma$ και έτσι $EZ \parallel AB$.

Δ3. Εφόσον η ΓΚ είναι ύψος και διχοτόμος του τριγώνου ΑΓΕ, το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές και έτσι η ΓΚ είναι διάμεσος. Άρα το Κ είναι μέσο της ΑΕ.
Ομοίως η ΑΚ είναι ύψος και διχοτόμος του τριγώνου ΑΖΛ.
Οπότε το τρίγωνο ΑΖΛ είναι ισοσκελές.
Έτσι το Κ είναι μέσο της ΖΛ.
Άρα οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΖΕΛΑ διχοτομούνται και λόγω του ερωτήματος Δ1 είναι κάθετες.
Ώστε το τετράπλευρο ΖΕΛΑ είναι ρόμβος.

Δ4. Στο τρίγωνο ΑΖΛ το Κ είναι το μέσο της ΖΛ και ισχύει $KN \parallel A\Lambda$.

Άρα το Ν είναι μέσο της ΑΖ. Έτσι $KN = \frac{A\Lambda}{2} = \frac{E\Lambda}{2}$.

Εναλλακτικά στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΖ, η ΚΝ είναι διάμεσος.

Οπότε $KN = \frac{AZ}{2} = \frac{E\Lambda}{2}$.